



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI TRENTO**

*Facoltà di Ingegneria*

*Corso di Laurea in Ingegneria per l'ambiente e il territorio*

*Corso di idrologia*

*Ricerca delle curve di possibilità pluviometriche  
Stazione di Tione*

Docente:

**Prof. Riccardo Rigon**

Studente:

**Brizzi Emanuele**

# ***Indice***

<b>Presentazione della stazione pluviometrica.....</b>	<b>3</b>
<b>Presentazione dei dati degli eventi di massima precipitazione.....</b>	<b>4</b>
<b>Analisi preliminare dei dati.....</b>	<b>5</b>
<b>Trattamento dei dati.....</b>	<b>8</b>
<b>Analisi completa degli scrosci.....</b>	<b>12</b>
<b>Curve di Gumbel per i dati.....</b>	<b>15</b>
<b>Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica.....</b>	<b>16</b>
<b>Analisi completa precipitazioni orarie.....</b>	<b>18</b>
<b>Curve di Gumbel per i dati.....</b>	<b>23</b>
<b>Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica.....</b>	<b>24</b>

*Tione*

Caratteristiche	
Località:	Tione
Quota:	575 m s.l.m.
Coordinate piano GaussBoaga:	est: 1633578, nord: 5098605
Coordinate GPS:	X GPS: 1633591.0899, Y GPS: 5098628.5497
Dati di pioggia disponibili (validati):	dal 1/1/1921 al 25/3/2008
Dati di temperatura disponibili (validati):	dal 1/1/1975 al 25/3/2008



## ***Presentazione dei dati degli eventi di massima precipitazione***

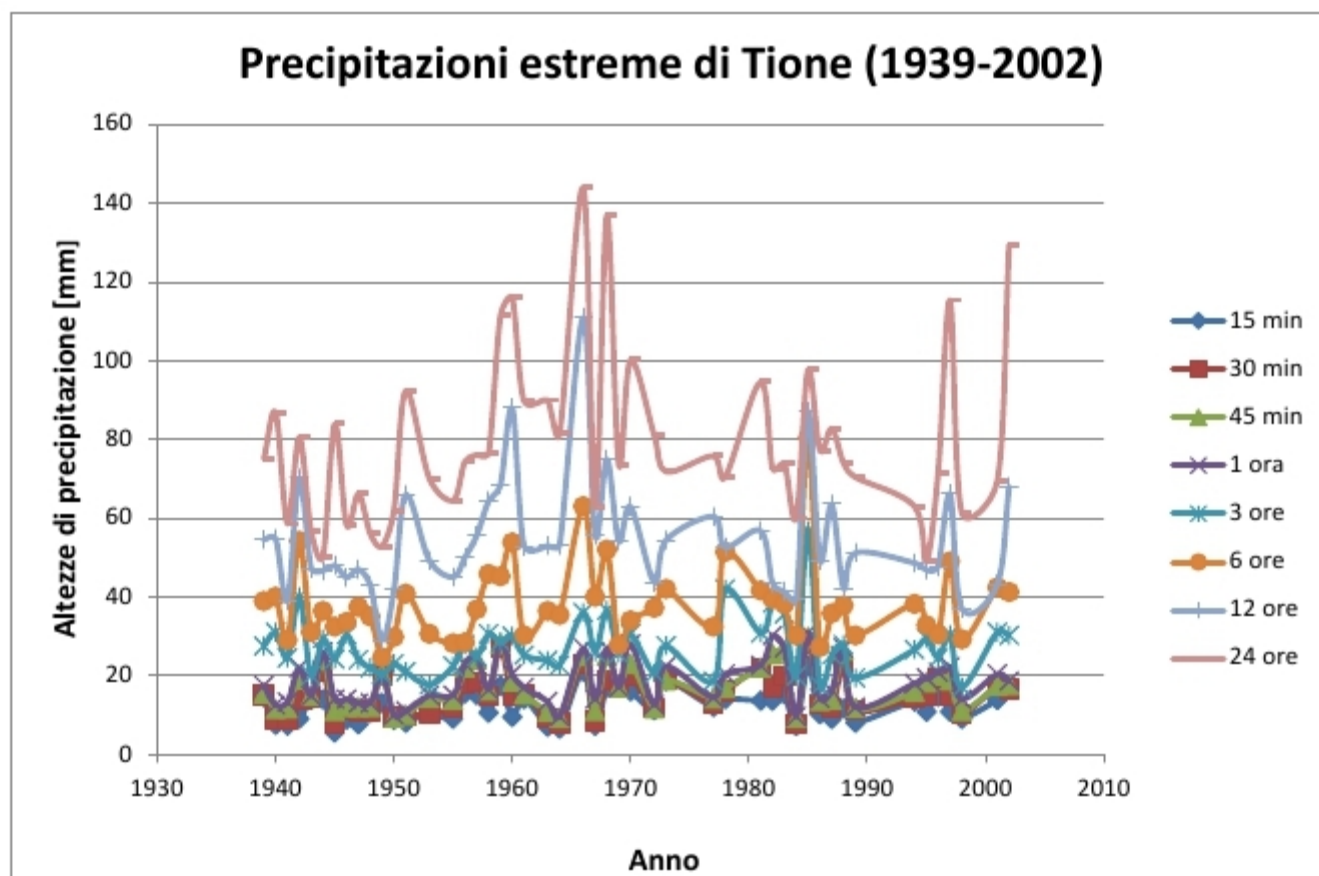
Nella tabella sottostante sono riportati i dati relativi alle precipitazioni massime (in mm) registrate per gli intervalli di tempo di durata pari a 15, 30, 45 min e di 1, 3, 6, 12 e 24 ore. I dati sono reperibili sul sito internet [www.meteotrentino.it](http://www.meteotrentino.it), sono riferiti ad un intervallo di tempo di 30 anni e più precisamente al periodo che va dal 1939 al 2002 compresi.

<b>Anno</b>	<b>15 min</b>	<b>30 min</b>	<b>45 min</b>	<b>1 ora</b>	<b>3 ore</b>	<b>6 ore</b>	<b>12 ore</b>	<b>24 ore</b>
1939	14,5	15	15,5	17,5	27,5	38,9	54,5	75
1940	7,5	9	11,5	12,5	31	40	54,8	86,8
1941	7,3	9	11,6	13,2	24,5	29	39	58,5
1942	9	14	19	22	40	54,2	70,2	80,6
1943	13,8	14,4	14,8	14,8	20	31	47,2	56,6
1944	14	21	24	26	29,4	36,4	46,6	50,2
1945	5,5	8	11	14	24,2	32,4	48	84
1946	8,8	11,5	12	14	30,4	33,6	44,9	58,1
1947	7,6	11	12	13	24	37,4	47	66,2
1948	10,5	11	12	13	22	35	43	56
1949	13	20,2	20,2	20,2	20,2	24,6	29	52,8
1950	8,7	9,4	9,4	10	23	29,8	41,8	62
1951	8	9,6	10	11	21	40,8	66	92,4
1953	10,5	10,5	14,3	15	17,6	30,6	49,2	70
1955	9	11,8	13,8	15	22,4	28,2	45	64,4
1956	15,5	18	22	23	27,8	28,4	50	74,4
1957	15	18,4	24,1	24,8	24,8	36,8	55,6	76
1958	10,5	14,8	16,2	16,4	30,6	45,8	64,4	76,4
1959	17,4	27	28	28,4	28,6	45,2	68,4	111,4
1960	9,5	15	18,5	20,4	30	53,8	88	116
1961	14	15,2	15,2	17	25,2	30,2	52,8	89,6
1963	7	9,2	10,7	13,4	23,8	36,4	53	90
1964	6,5	8	9,2	9,6	22,6	35,4	53	81,4
1966	21	23	25	27	36	63	111	144
1967	7,2	8,5	11	14	26	40	55,6	62,6
1968	17	19	25	27	36,6	52	75	137
1969	17	17	17	17	25,6	27,8	54	73,6
1970	16	20	23	28	30,6	34	63	100,2
1972	11,2	11,6	11,6	12,6	20,6	37,2	43,6	81
1973	18,6	18,8	18,8	22,4	27,6	42	54,4	71,8
1977	12	12,8	14,2	14,4	18,6	32,4	60,4	75,8
1978	14	16	16,8	20,4	42	51,4	52,6	70,4
1981	13,6	21,8	22	22,6	30,8	41,6	56,8	94,6
1982	13,6	17	25,4	30,2	38,4	39,4	43,4	72,4

1983	15,2	19,8	26,2	27	35,6	38,2	41,4	74
1984	7,2	7,6	9,2	9,6	19,8	30,2	39,2	60
1985	22,4	28,6	29,8	30,8	56,8	80,4	87,2	97,8
1986	10,2	12,6	13,6	14,2	17,4	27,2	49,2	77,2
1987	9	11,8	13,8	16,2	25,2	35,8	63,6	82,8
1988	11,6	22,4	26,4	27	27,8	37,8	42,2	74
1989	8	11,2	11,8	12	19,4	30,2	51,2	70,4
1994	13,4	14,2	15,8	18	26,6	38,2	48,6	63
1995	10,8	15	18,2	19,4	29,6	32,8	46,8	49
1996	14,6	19,2	20	20,8	24,4	30,4	47,6	71,6
1997	10,8	15	18,8	22,2	30,4	49	66,2	115,4
1998	9	10,2	11	14	17	29,2	37	61,2
2001	13,8	17,2	17,4	20,4	31	42,4	43,2	69,4
2002	16,6	16,6	17,6	18,6	30,2	41,2	68	129,4

### *Analisi preliminare dei dati*

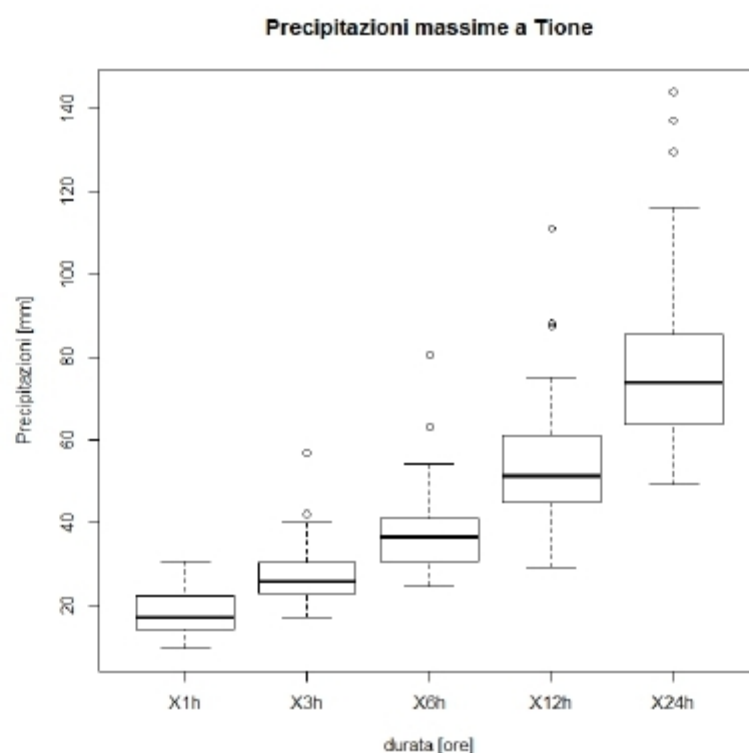
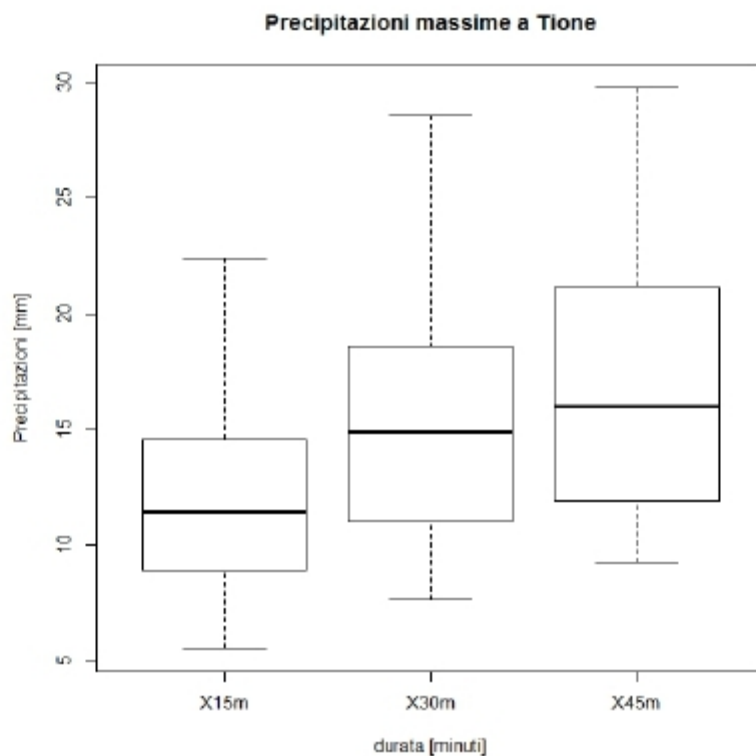
Per controllare la veridicità dei dati in tabella, abbiamo realizzato un grafico per verificare che i valori di pioggia delle serie dovranno essere maggiori o tutt'al più uguali ai valori corrispondenti delle serie di minor durata (ad esempio i valori della serie sulle 12 ore devono essere maggiori o uguali della serie sulle 6 ore).



Il grafico sotto riportato rappresenta la media, primo e terzo quantile.

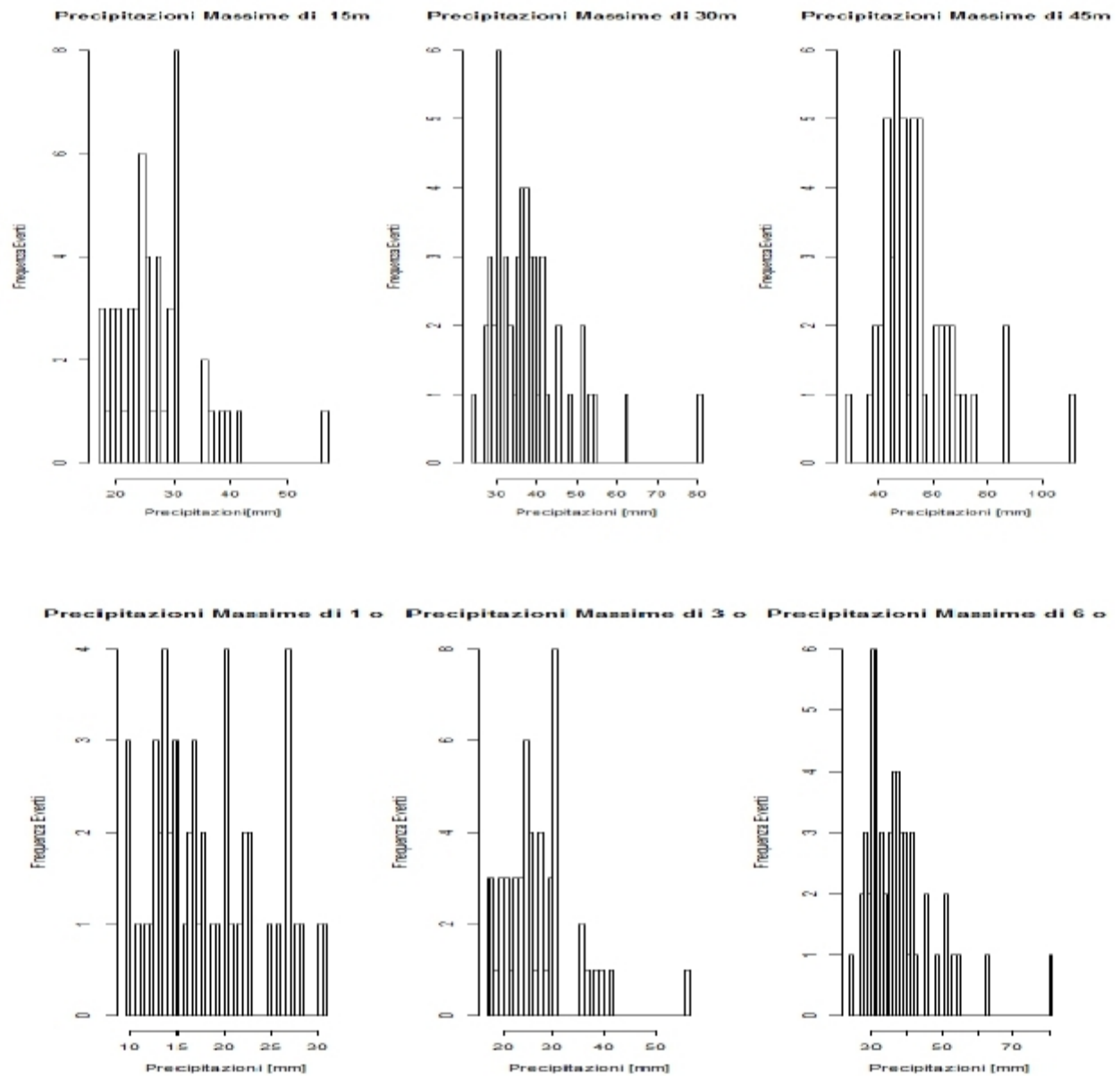
Si può notare la coerenza dei dati, in quanto il valore medio per ogni serie temporale cresce all'aumentare della durata.

Le appendici superiori ed inferiori rappresentano una grande varianza dovuta agli errori nelle misure. I dati che si trovano al di fuori delle appendici costituiscono invece errori grossolani.

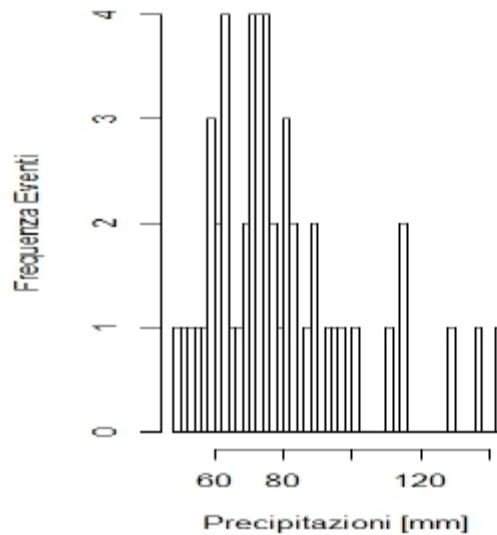
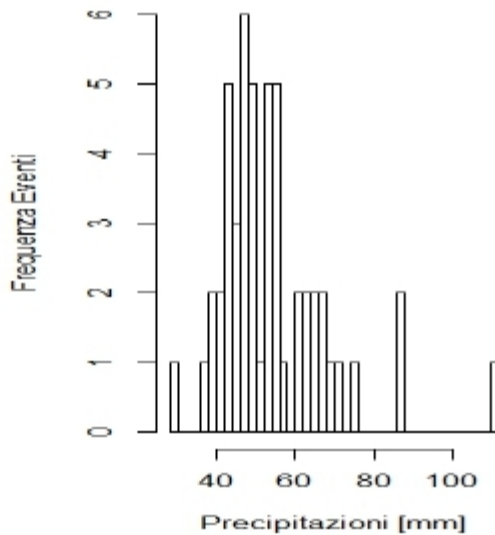




Successivamente si sono tracciati degli istogrammi al fine di verificare qualitativamente la distribuzione delle frequenze con le quali si presentano le altezze di precipitazione su intervalli di tempo omogenei, nonché un boxplot, tramite il quale possiamo avere anche delle informazioni circa le medie, i quantili, le dispersioni ed i dati particolarmente discostati dalle medie. I risultati di tali elaborazioni sono presentati nelle figure seguenti.



## Precipitazioni Massime di 12 o    Precipitazioni Massime di 24 o



### *Trattamento dei dati*

La presente relazione ha come scopo quello di tracciare le curve di possibilità pluviometrica sulla base dei dati di massima precipitazione relativi al Comune di Tione.

Il problema da risolvere con l'ausilio della teoria delle probabilità e dell'analisi statistica è quello di determinare, per ogni durata, la corrispondenza tra quantili (assegnati i tempi di ritorno) e altezza di precipitazione.

Essendo la variabile in analisi un evento estremo, la distribuzione statistica che più si addice al problema è quella a doppio esponenziale di Gumbel. La variabile  $h$  si lega alla sua probabilità cumulata di non superamento  $y$  mediante la legge:

$$\begin{cases} y = \alpha(h - v) \\ P(H \leq h) = e^{-e^{-y}} \Rightarrow P(H \leq h) = e^{-e^{-\alpha(h-v)}} \end{cases}$$

I parametri  $\alpha$  e  $v$  sono necessari al calcolo della probabilità di non superamento ( $y$ ). Sono due costanti che vanno determinate mediante l'uso di diversi metodi di risoluzione del modello statistico:



## Metodo dei minimi quadrati

Con questo metodo vengono determinati i parametri in modo da minimizzare la distanza fra i valori osservati e i valori teorici cioè tra i punti che rappresentano i dati sul piano  $h, p(h)$  e punti della curva di possibilità. Ciò significa che deve essere minima la somma dei quadrati delle differenze fra i due valori.

$$\delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( F_i - e^{-e^{-\alpha(h-v)}} \right)^2$$

dove  $F_i$  è il fattore di probabilità cumulata di non superamento che è si trova tramite l'equazione  $F_i = \frac{i}{N+1}$  e  $\delta$  la distanza tra dati e curva.

Per ciascun numero poi si calcola

$$y_i = -\ln[-\ln(F_i)].$$

Si sceglie la funzione di andamento rettilineo che meglio interseca la serie di dati raccolti e minimizza così gli scarti

$$y = a * h + b ,$$

dove  $h$  e  $y$  sono le variabili.

Eguagliando l'equazione sopra con l'espressione linearizzata della curva di possibilità pluviometrica

$$y = \alpha(h - v)$$

ricavo

$$\alpha = a \quad \text{e} \quad v = \frac{b}{\alpha}$$

## Metodo dei momenti

Questo metodo consiste nell'eguagliare due diversi momenti di una popolazione composta da un numero infinito di dati agli stessi momenti calcolati per la popolazione rappresentata dal campione di dati da analizzare. Cioè si eguagliano due diverse espressioni matematiche, una calcolata per un numero infinito di dati, l'altra per un campione discreto.

Per fare ciò risulta conveniente sfruttare i due momenti più facili da calcolare, cioè quello di primo ordine (media) e quello di secondo ordine (varianza).

La media del campione è definita come

$$\bar{h} = \frac{\sum_{i=1}^N h_i}{N}$$

per ipotesi statistica

$$\bar{h} = \mu_h$$

e la varianza :

$$S_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2}{N}$$

per ipotesi statistica

$$S_h = \sigma_h$$

Invece la media di una popolazione ideale risulta pari a  $\mu_h = \gamma = n^\circ \text{Eulero} = 0,5772$ .

E la varianza della popolazione ideale risulta pari a  $\sigma_y^2 = \frac{\pi^2}{6}$

Quindi da queste espressioni

$$\begin{cases} \mu_h = \frac{1}{\alpha} \mu_y + v \\ \sigma_h^2 = \frac{\sigma_y^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \end{cases}$$

trovo infine

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{6}}}{\sigma_h} \approx \frac{\frac{\pi}{\sqrt{6}}}{S_h}$$

$$v = \mu_h - \frac{\sigma_h \gamma}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}} \approx \bar{h} - \frac{S_h \gamma}{\frac{\pi}{\sqrt{6}}}$$

### Metodo della massima verosimiglianza

Questo metodo consiste nella determinazione dei parametri  $\alpha$  e  $v$  massimizzando la funzione di massima verosimiglianza  $V$  definita come:  $V = \prod P(\theta_1, \theta_2, h_i)$ .

Essa rappresenta la densità di probabilità della distribuzione congiunta degli  $N$  dati.

Si cercano i valori di  $\theta_1$  e  $\theta_2$  per cui  $V$  è massimo, dove  $\theta_1 = \alpha$  e  $\theta_2 = v$ .

Il massimo si ricava annullando le derivate di  $V$  rispetto ai parametri  $\alpha$  e  $u$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\alpha v} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N e^{-\alpha h_i}} \\ \frac{N}{\alpha} - \sum_{i=1}^N h_i + N \frac{\sum_{i=1}^N h_i e^{-\alpha h_i}}{\sum_{i=1}^N e^{-\alpha h_i}} = 0 \end{cases}$$

Il termine  $\alpha$  si calcola per iterazione: lo si pone inizialmente uguale ad 1 e si trova un valore di secondo tentativo; si procede poi continuando a calcolare valori fino a che le soluzioni non convergono. Trovato così  $\alpha$  si calcola  $v$ .

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i - \frac{\sum_{i=1}^N h_i e^{-\alpha h_i}}{\sum_{i=1}^N e^{-\alpha h_i}}}$$

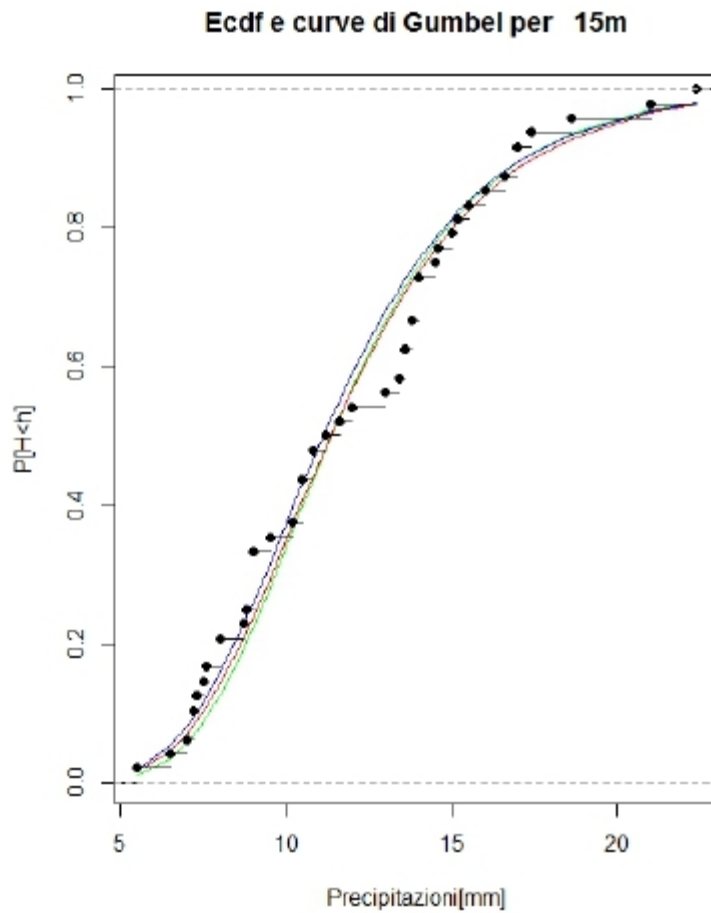
$$v = \frac{1}{\alpha \ln \left( \frac{N}{\sum_{i=1}^N h_i e^{-\alpha h_i}} \right)}$$

Dopo l'applicazione dei vari metodi di adattamento attraverso il supporto del software statistico R si ottengono come risultato tre coppie di parametri, tutti in un certo senso ottimi.

Per distinguere quale tra questi insiemi di parametri sia il migliore, bisogna usare un criterio di confronto (test non parametrico). Questa operazione si svolge applicando il test di Pearson, il cui risultato  $\{X^2\}$  è tanto minore quanto meglio la curva di Gumbel approssima l'ECDF = *frequenza empirica di non superamento (empirical cumulative distribution function)*.

## *Analisi completa degli scrosci*

Per quanto riguarda gli scrosci (durata 15,30, 45 minuti)



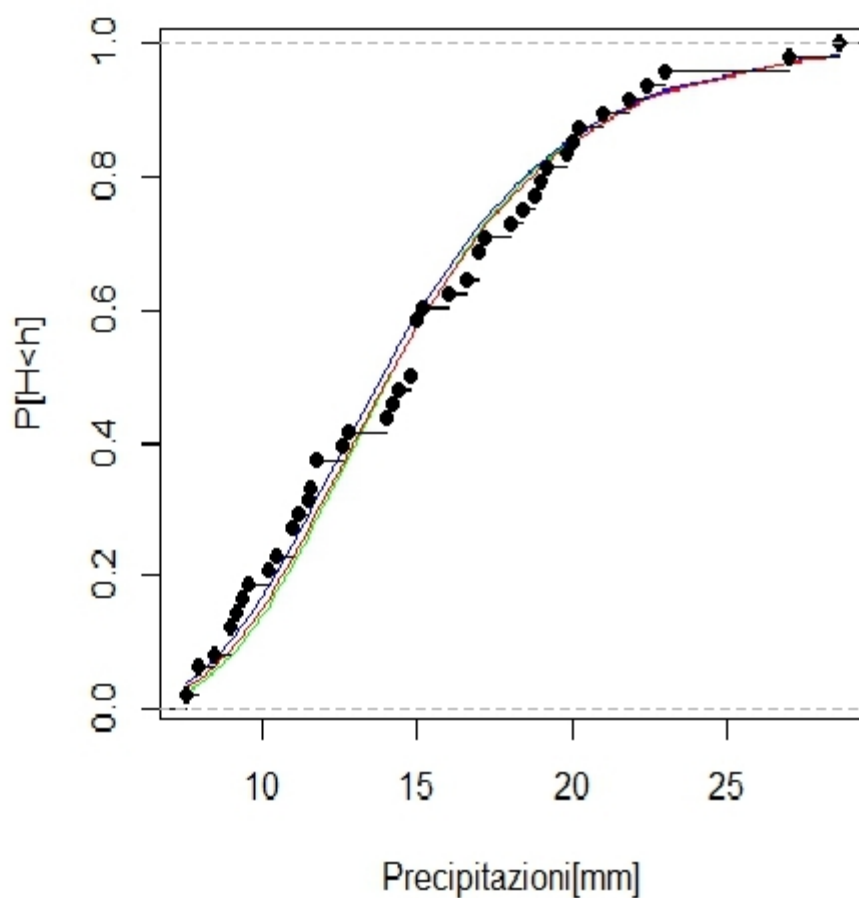
Media [mm] = 12.01875

Varianza [mm<sup>2</sup>] = 15.62581

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
a = 10.23971	a = 9.952115	a = 10.16073
b = 3.082102	b = 3.201969	b = 3.243037
$\chi^2 = 2.833333$	$\chi^2 = 0.9583333$	$\chi^2 = 1.166667$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo dei minimi quadrati*

## Ecdf e curve di Gumbel per 30m

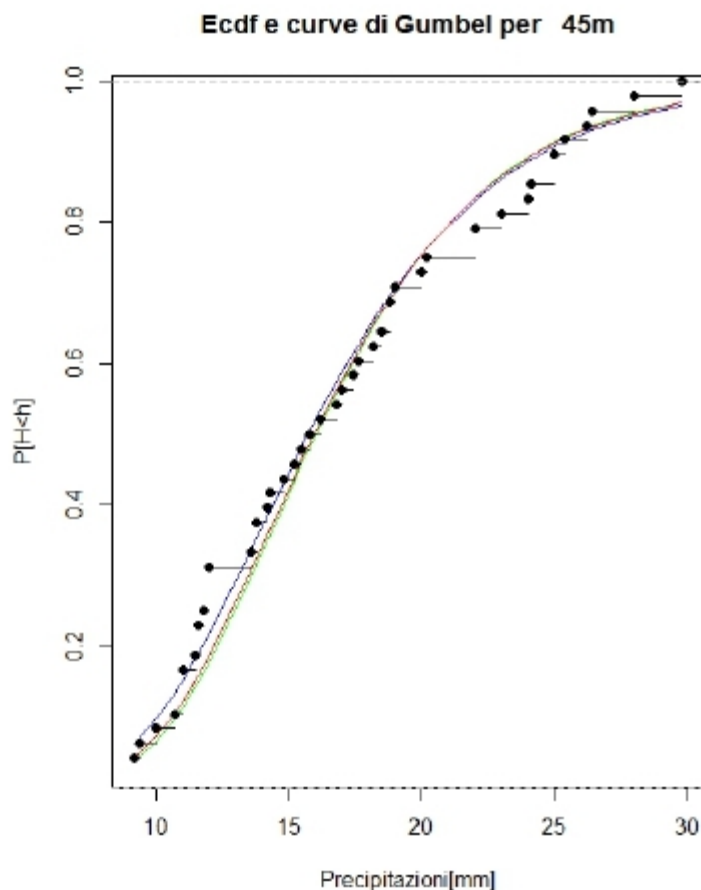


Media [mm] = 14.95625

Varianza [mm<sup>2</sup>] = 25.48634

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 12.6842$	$\alpha = 12.36782$	$\alpha = 12.60776$
$v = 3.936221$	$v = 4.07271$	$v = 4.055578$
$\chi^2 = 1.583333$	$\chi^2 = 0.9583333$	$\chi^2 = 1.583333$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo dei minimi quadrati*



Media [mm] = 16.96667

Varianza [mm<sup>2</sup>] = 31.95844

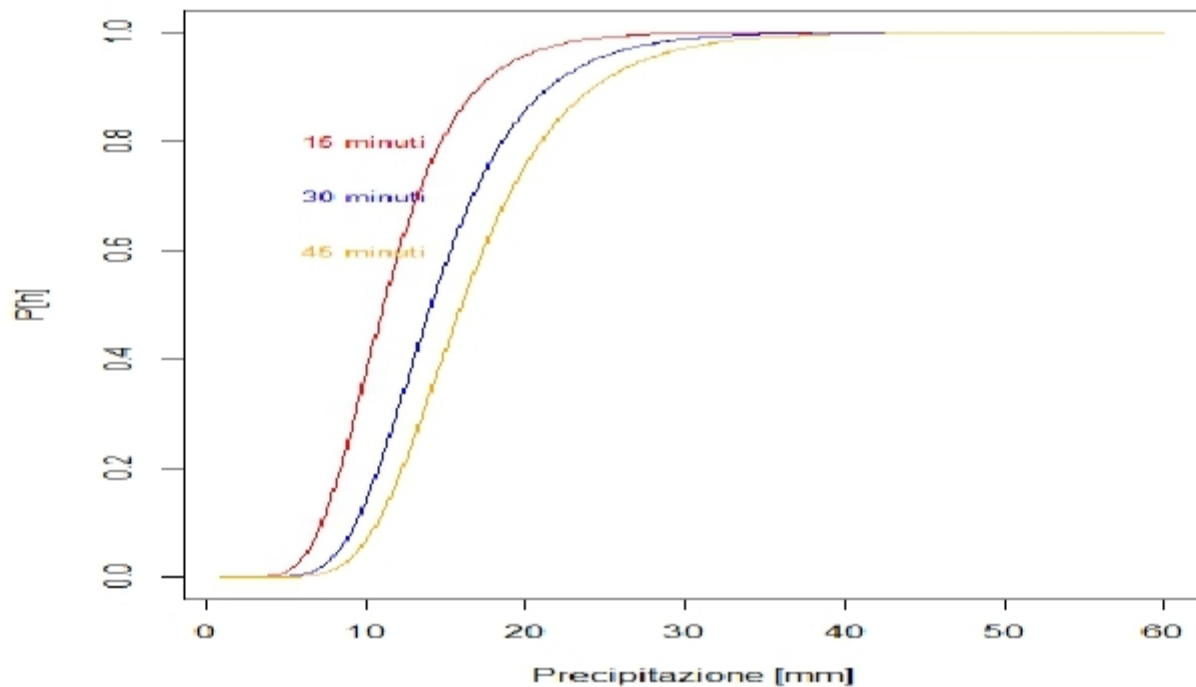
<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 14.42244$	$\alpha = 14.0002$	$\alpha = 14.32882$
$v = 4.407766$	$v = 4.721343$	$v = 4.470312$
$\chi^2 = 6.375$	$\chi^2 = 1.583333$	$\chi^2 = 6.583333$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo dei minimi quadrati*

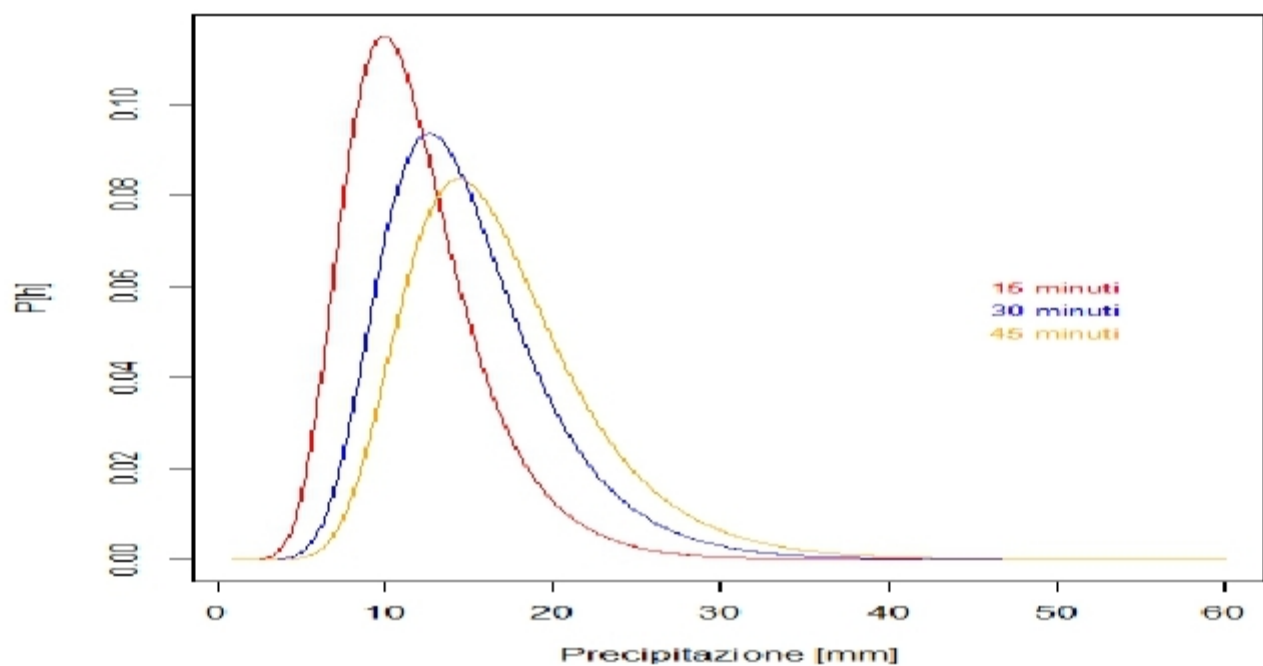


## *Curve di Gumbel per i dati*

In seguito alla determinazione della curva e dei suoi relativi parametri, si procede alla realizzazione delle curve di probabilità di non superamento:



E alle curve di densità di probabilità associate alle curve di Gumbel



## ***Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica***

Le LSPP = *linee segnalatrici di possibilità pluviometrica* esprimono la relazione tra l'altezza della precipitazione ( $h$ ), la durata dell'evento ( $t_p$ ) e la sua frequenza ( $T_r$ )

Per costruirle usiamo una delle espressioni più note

$$h(t_p, T_r) = a(T_r) * t_p^n$$

dove

$a$  [mm/s] = pioggia di durata unitaria, parametro sensibilmente variabile con  $T_r$

$n$  (numero puro, compreso tra 0 e 1) = fluttuazione attorno al valore medio comune a tutti i tempi di ritorno.

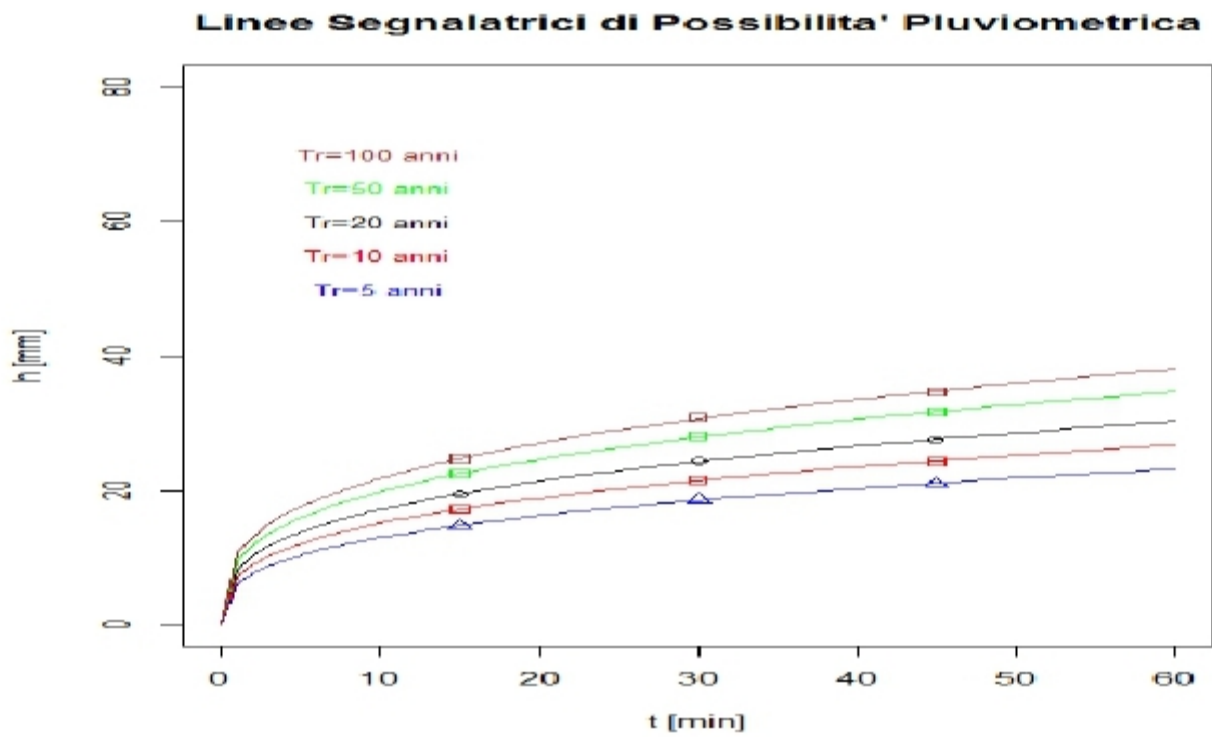
Il prossimo passo è individuare il quantile associato a ciascuna curva di Gumbel per un assegnato di ritorno  $T_r$  e poi interpolare i punti ricavati in un campo logaritmico per ottenere i valori di  $a$  e di  $n$ , parametri caratteristici della distribuzione.

I risultati e la rappresentazione fanno notare che i punti con uguale tempo di ritorno si dispongono lungo una linea retta creando un fascio di rette tra di loro parallele che non si devono incrociare. Questo fatto si può anche spiegare pensando che un'eventuale intersezione tra due rette relative a  $T_r$  diversi comporterebbe una discontinuità nelle curve di Gumbel, ossia che ad un'altezza di pioggia di durata assegnata siano associati due tempi di ritorno differenti

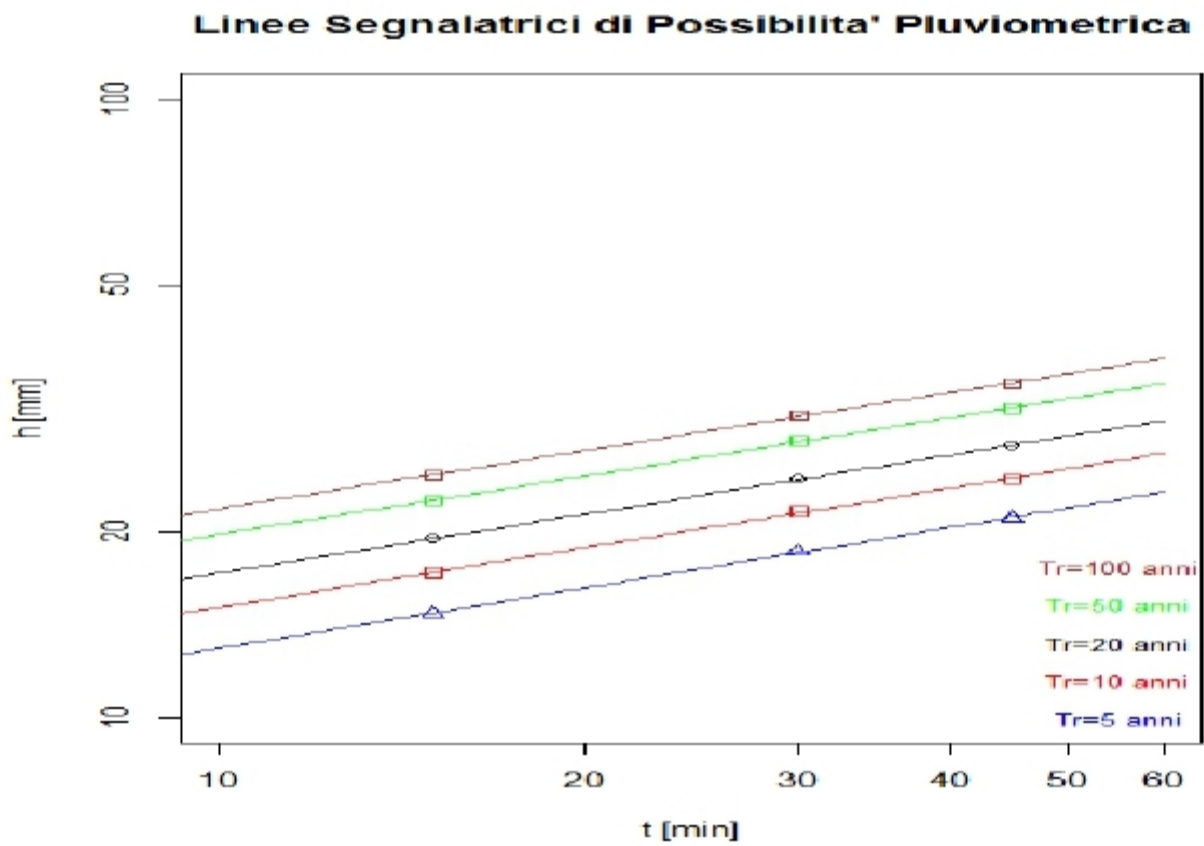
La tabella seguente mostra i valori dei parametri  $a$  e  $n$  delle rette calcolate con i tempi di ritorno di 5, 10, 20, 50 e 100 anni, da utilizzare per il calcolo delle altezze delle precipitazioni  $h$ .

<b><i>Tempo di Ritorno (anni)</i></b>	<b><i>a</i></b>	<b><i>n</i></b>
5	1.81629	0.32386
10	1.9791156	0.3194156
20	2.1138878	0.3161706
50	2.265170	0.312949
100	2.3652516	0.3110402

Determinati  $a$  ed  $n$  si riportano i grafici a scala normale



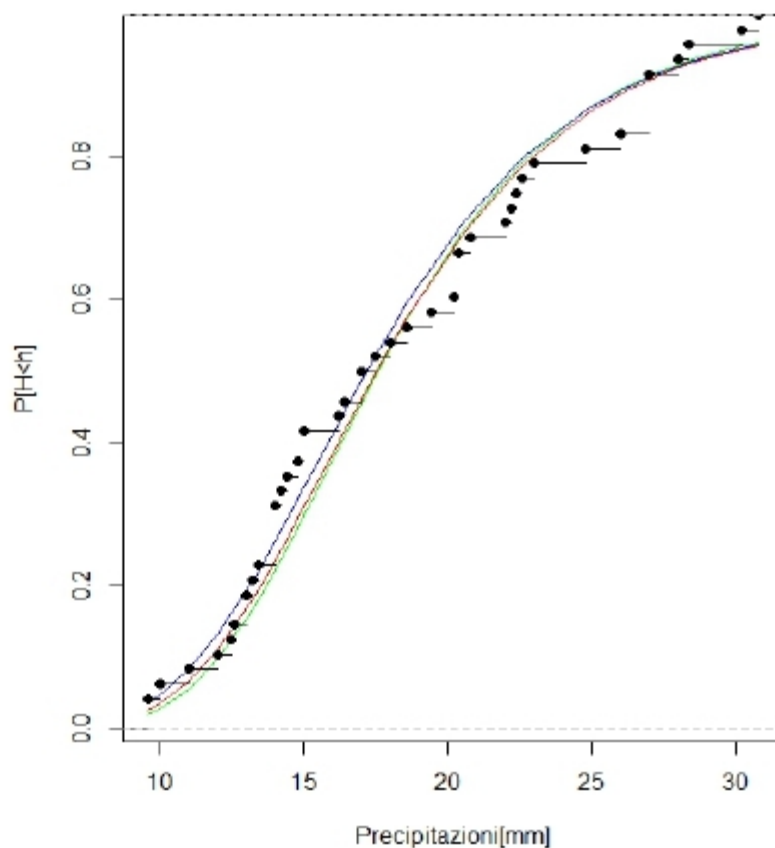
E in scala bi-logaritmica



## *Analisi completa precipitazioni orarie*

Per quanto riguarda le precipitazioni orarie (1, 3, 6, 12, 24 ore)

**Ecdf e curve di Gumbel per 1h**



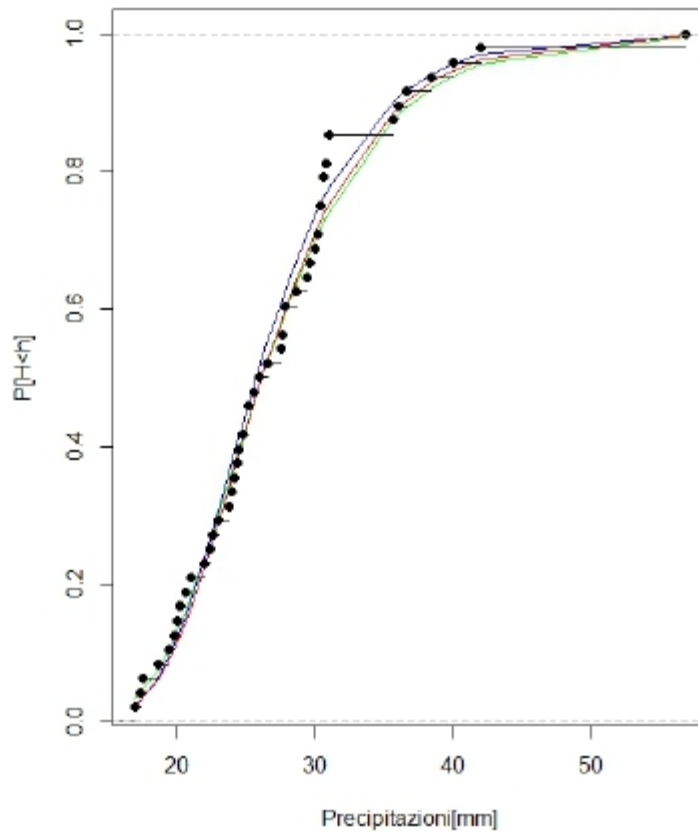
Media [mm] = 18.54167

Varianza [mm<sup>2</sup>] = 34.97567

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 15.88004$	$\alpha = 15.40111$	$\alpha = 15.75915$
$\nu = 4.611145$	$\nu = 4.845706$	$\nu = 4.792363$
$\chi^2 = 1.791667$	$\chi^2 = 1.166667$	$\chi^2 = 1.166667$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo della massima verosimiglianza*

**Ecdf e curve di Gumbel per 3h**



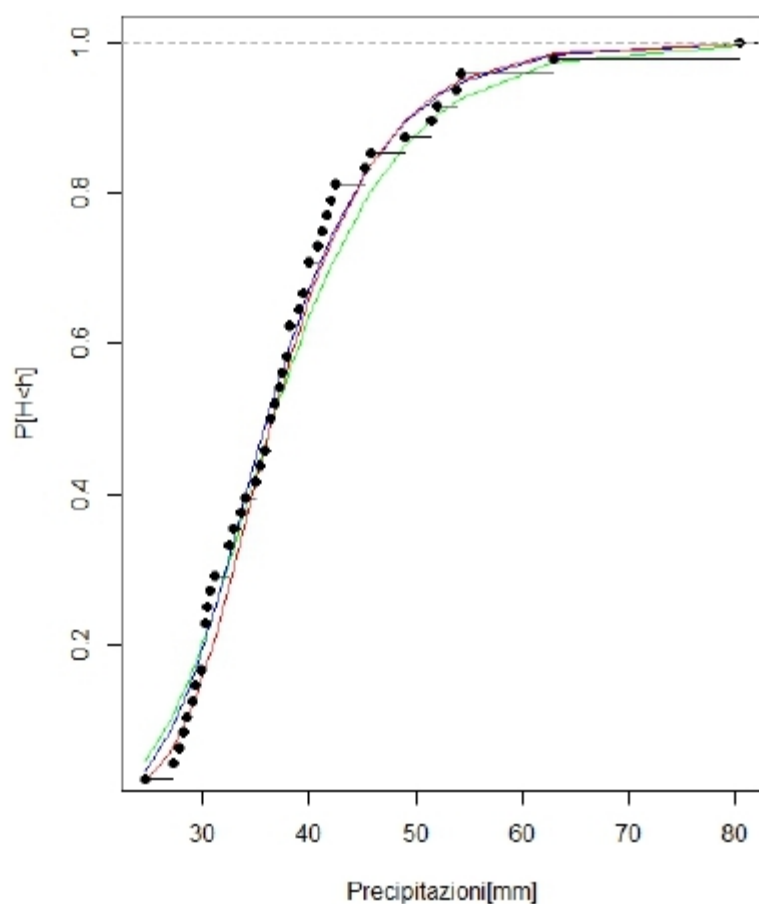
Media [mm] = 27.3875

Varianza [mm<sup>2</sup>] = 54.3092

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 24.07084$	$\alpha = 23.87426$	$\alpha = 24.20365$
$v = 5.745958$	$v = 5.181192$	$v = 5.416658$
$\chi^2 = 1.375$	$\chi^2 = 5.958333$	$\chi^2 = 1.375$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo della massima verosimiglianza*

**Ecdf e curve di Gumbel per 6h**



Media [mm] = 38.28542

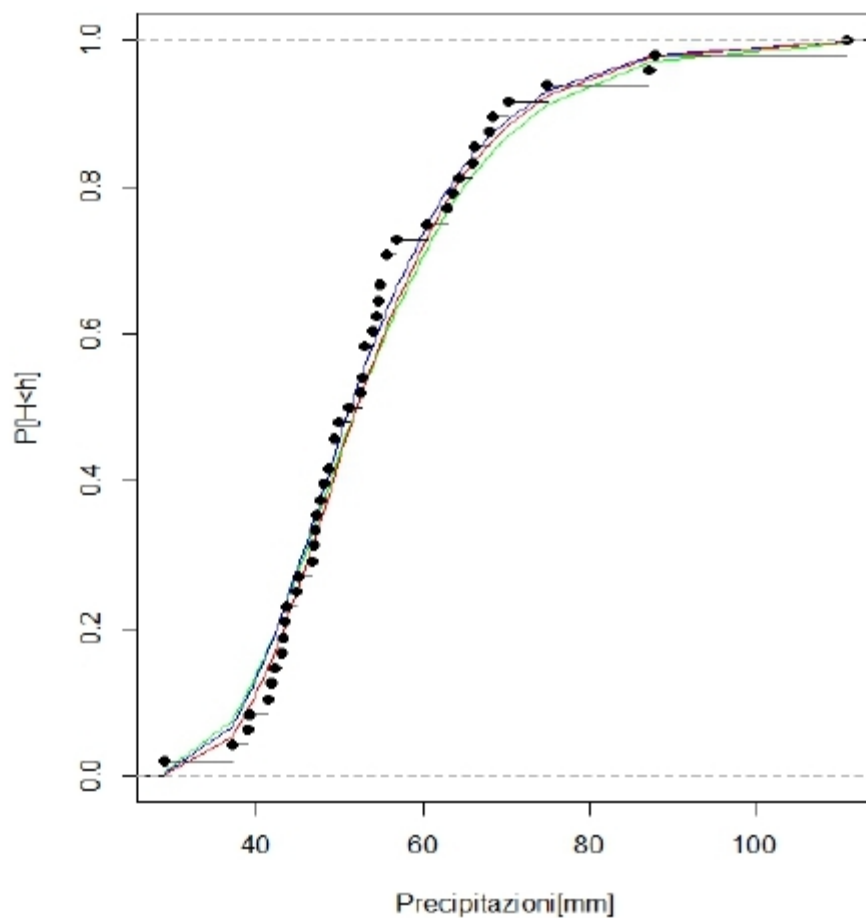
Varianza [mm<sup>2</sup>] = 104.8702

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 33.67659$	$\alpha = 33.42169$	$\alpha = 34.08632$
$\nu = 7.984575$	$\nu = 7.122965$	$\nu = 6.749546$
$\chi^2 = 1.375$	$\chi^2 = 0.75$	$\chi^2 = 2.833333$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo dei minimi quadrati*



**Ecdf e curve di Gumbel per 12h**



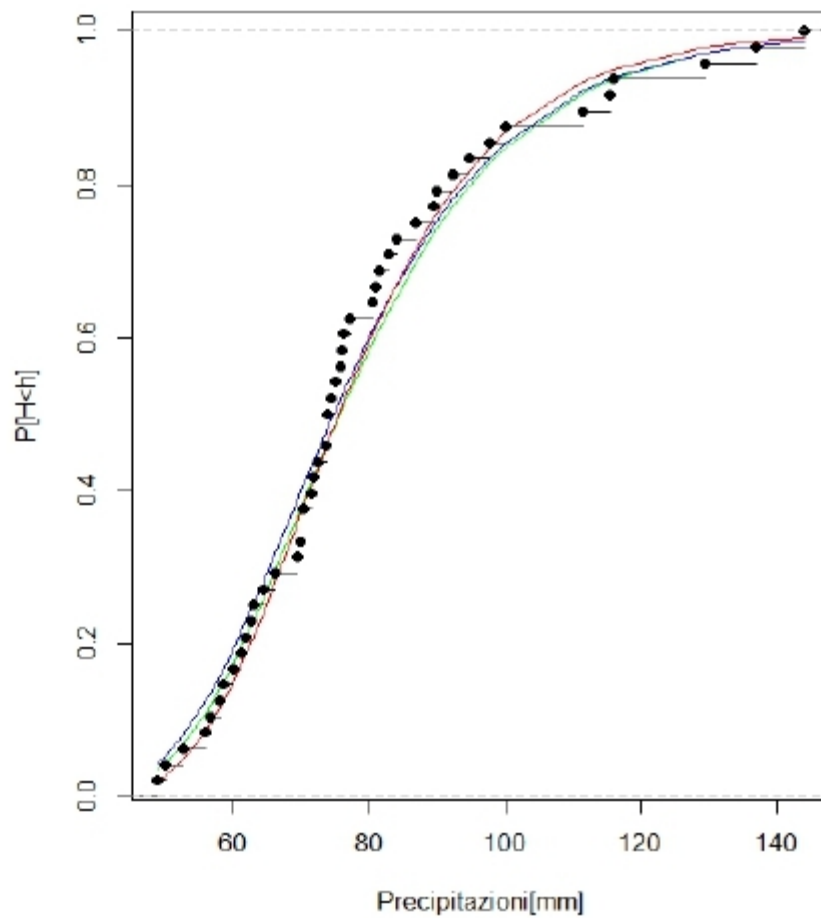
Media [mm] = 54.42917

Varianza [mm<sup>2</sup>] = 213.7119

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 47.84989$	$\alpha = 47.43223$	$\alpha = 48.27017$
$\nu = 11.3983$	$\nu = 10.5021$	$\nu = 10.47149$
$\chi^2 = 3.25$	$\chi^2 = 2.416667$	$\chi^2 = 2.208333$

si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo della massima verosimiglianza*

**Ecdf e curve di Gumbel per 24h**



Media [mm] = 79.32083

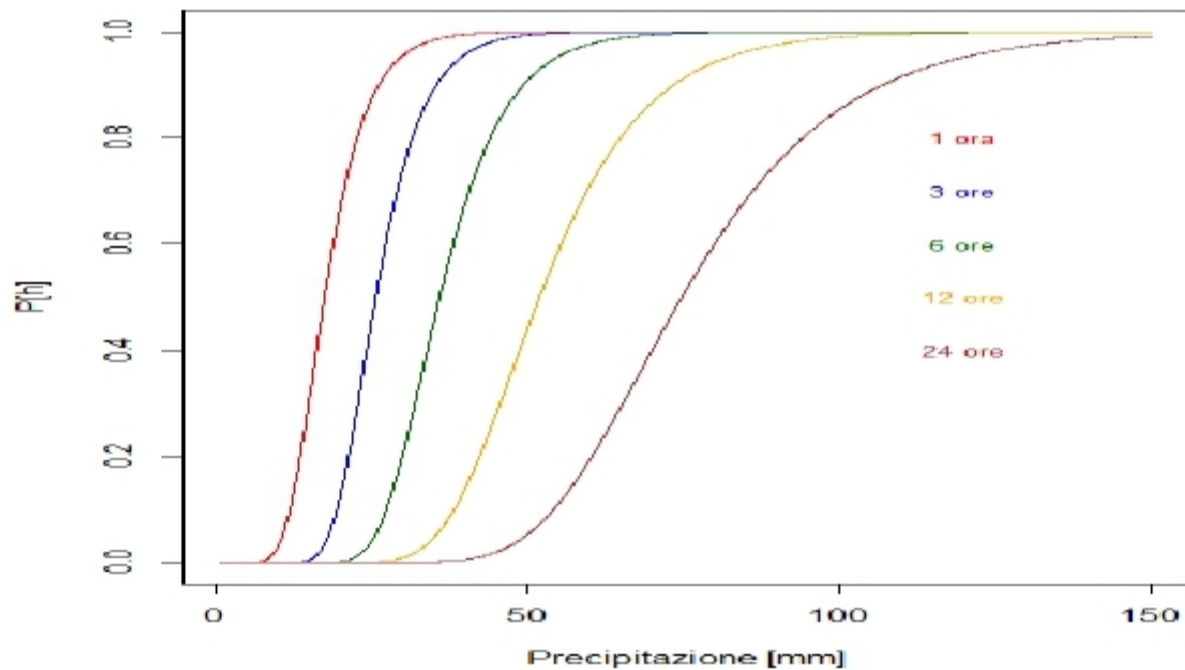
Varianza [mm<sup>2</sup>] = 472.9574

<i>Metodo dei momenti</i>	<i>Metodo dei minimi quadrati</i>	<i>Metodo della massima verosimiglianza</i>
$\alpha = 69.53326$	$\alpha = 68.54831$	$\alpha = 69.93427$
$\nu = 16.95652$	$\nu = 17.0931$	$\nu = 15.4355$
$\chi^2 = 1.583333$	$\chi^2 = 2.625$	$\chi^2 = 0.9583333$

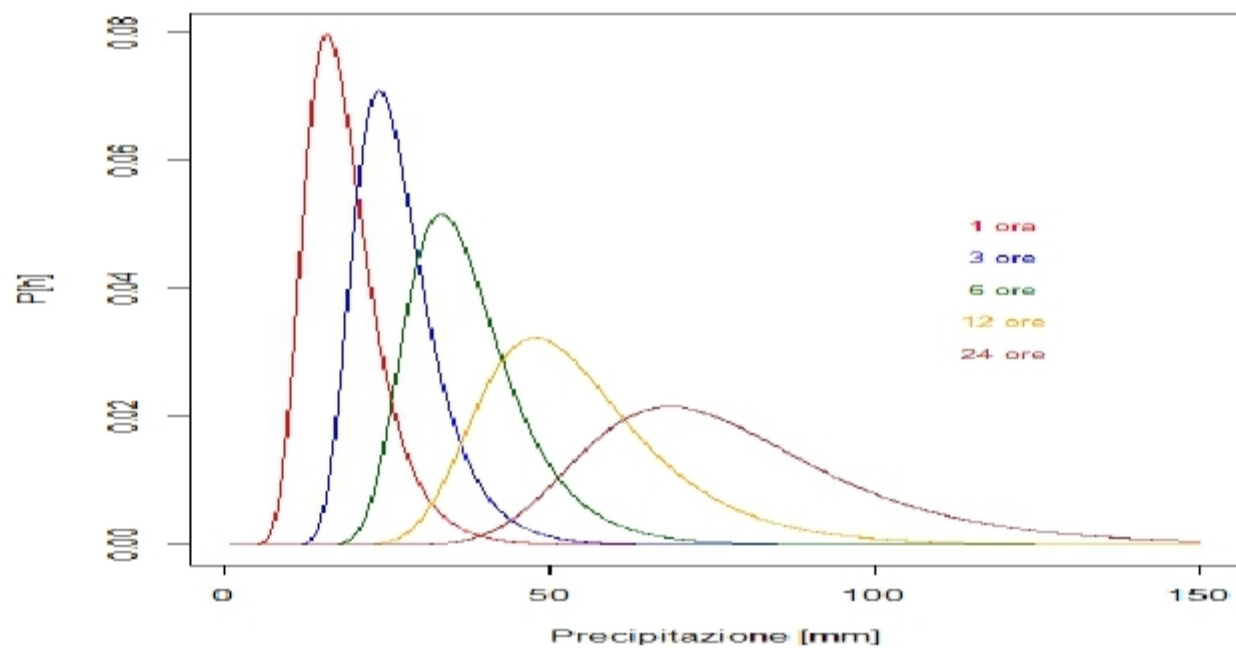
si sceglie la curva di Gumbel ottenuta tramite il *Metodo della massima verosimiglianza*

## *Curve di Gumbel per i dati*

In seguito alla determinazione della curva e dei suoi relativi parametri, si procede alla realizzazione delle curve di probabilità di non superamento:



E alle curve di densità di probabilità associate alle curve di Gumbel



## ***Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica***

Le LSPP = *linee segnalatrici di possibilità pluviometrica* esprimono la relazione tra l'altezza della precipitazione ( $t_p$ ), la durata dell'evento ( $t_p$ ) e la sua frequenza ( $T_r$ )

Per costruirle usiamo una delle espressioni più note

$$h(t_p, T_r) = a(T_r) * t_p^n$$

dove

$a$  [mm/s] = pioggia di durata unitaria, parametro sensibilmente variabile con  $T_r$

$n$  (numero puro, compreso tra 0 e 1) = fluttuazione attorno al valore medio comune a tutti i tempi di ritorno.

Il prossimo passo è individuare il quantile associato a ciascuna curva di Gumbel per un assegnato di ritorno  $T_r$  e poi interpolare i punti ricavati in un campo logaritmico per ottenere i valori di  $a$  e di  $n$ , parametri caratteristici della distribuzione.

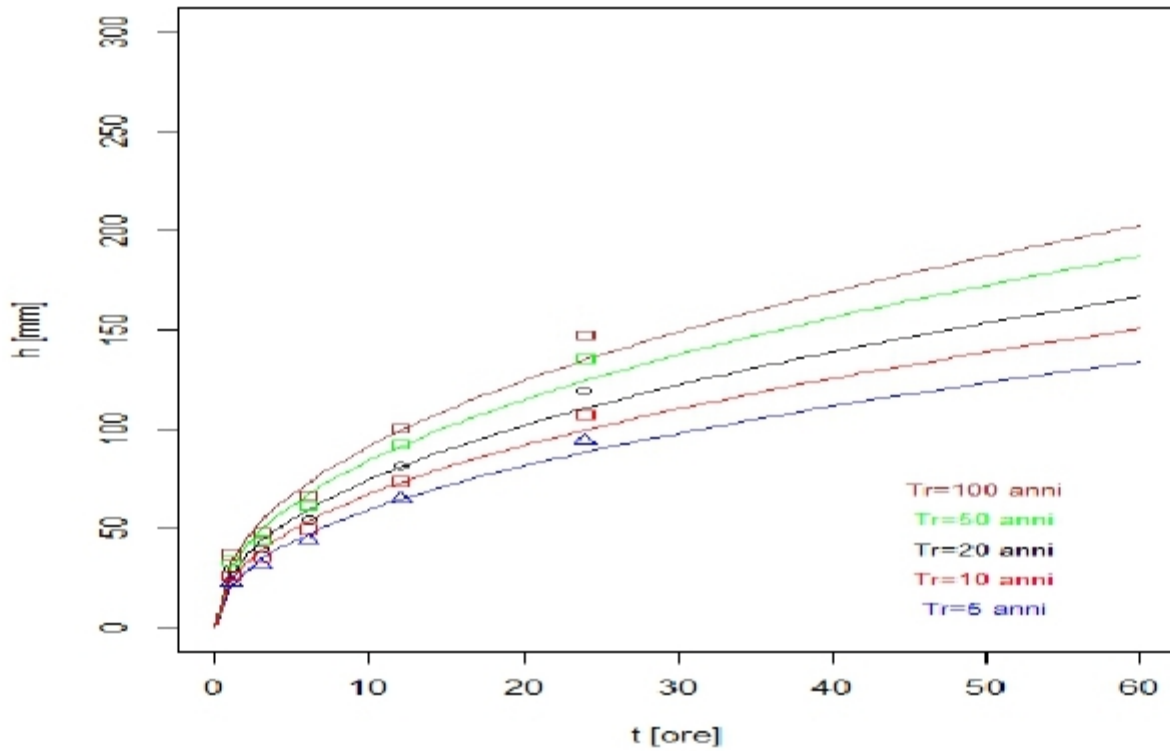
I risultati e la rappresentazione fanno notare che i punti con uguale tempo di ritorno si dispongono lungo una linea retta creando un fascio di rette tra di loro parallele che non si devono incrociare. Questo fatto si può anche spiegare pensando che un'eventuale intersezione tra due rette relative a  $T_r$  diversi comporterebbe una discontinuità nelle curve di Gumbel, ossia che ad un'altezza di pioggia di durata assegnata siano associati due tempi di ritorno differenti

La tabella seguente mostra i valori dei parametri  $a$  e  $n$  delle rette calcolate con i tempi di ritorno di 5, 10, 20, 50 e 100 anni, da utilizzare per il calcolo delle altezze delle precipitazioni  $h$ .

Tempo di Ritorno (anni)	$a$	$n$
5	3.042447	0.452971
10	3.1727636	0.4496288
20	3.2834547	0.4471392
50	3.4105249	0.4446254
100	3.4961106	0.4431159

Determinati  $a$  ed  $n$  si riportano i grafici a scala normale

### Linee Segnalatrici di Possibilita' Pluviometrica



E in scala bi-logaritmica

### Linee Segnalatrici di Possibilita' Pluviometrica

