Mecânica Clássica: Posição e Distância

Mario Cezar Bertin[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

24 de setembro de 2020

Rich media available at https://youtu.be/9Ip7-0Oa8UM

Resumo dos conceitos primitivos

Vamos relembrar os conceitos primitivos que apresentamos em aulas passadas, para preparar o terreno do que vem a seguir.

Primeiro, introduzimos o conceito de partícula clássica, que consiste em um objeto sem dimensões, que não pode ser criado ou destruído, e que possui um conjunto de observáveis associados, ou definidores, como a massa e a carga elétrica. Com a partícula, podemos construir sistemas de partículas, que consistem em conjuntos de partículas com suas características definidoras.

No contexto de sistemas de partículas, ou sistemas físicos, introduz-se o conceito de interação e de movimento. Duas partículas em um mesmo sistema, no geral, interagem entre si mudando seus estados de movimento. A interação entre partículas depende dos observáveis intrínsecos às partículas do sistema, como a massa e a carga elétrica, que geram as interações gravitacional e eletromagnética, respectivamente. Estados de movimento necessitam da estrutura matemática para serem devidamente definidos, mas estamos chegando lá.

Toda característica de um sistema físico, inclusive as características intrínsecas, é um observável. O observador é um sistema físico munido de um aparato de medida, ou seja, uma forma de se coletar informação sobre um determinado observável do sistema físico alvo. Esta coleta de informações é denominado de medição, enquanto a informação coletada é chamada de medida. Uma medida é um elemento do conjunto de todas as medidas possíveis de serem coletadas sobre determinado observável, o espectro. Considerando-se um espectro relacionado a um observável, uma medição pode filtrar uma única medida, ou um subconjunto de medidas do espectro.

O processo de medição consiste na interação entre o observador e o sistema físico, de modo que, em via de regra, os estados de movimento de ambos podem ser alterados. Contudo, definimos uma medida clássica como aquela que perturba minimamente o estado de movimento do sistema, de modo que a interferência da medição é considerada desprezível.

Sobre o mapeamento dos conceitos primitivos em estruturas matemáticas

Para a construção de uma teoria coerente para a mecânica clássica, vamos nos utilizar da precisão matemática. Esta é a vocação primordial da física: descrever e predizer o comportamento de fenômenos naturais de forma precisa e inequívoca. Um caminho que poderíamos seguir é o de postular, através da observação e experiência, o comportamento dos conceitos primitivos da teoria. Para tanto, precisaríamos incluir outros conceitos e demonstrar seu comportamento matemático. Contudo, nosso ponto de vista será mais simples. A partir dos conceitos já estabelecidos, estabeleceremos um mapa para estruturas matemáticas já existentes. Este mapeamento tem o objetivo primeiro de estabelecer precisamente uma forma de relacionar as partículas, movimento e interações de um sistema.

O mapeamento se dá através de postulados, que relacionam conceitos físicos a objetos matemáticos. Definiremos, primeiro, o conceito de posição:

> **Postulado 1:** A **posição** de uma partícula consiste em um elemento (ou ponto) do **espaço euclidiano tridimensional** $\mathbb{R}^3$.

Neste caso, introduzimos um novo conceito, o de posição, e este conceito está vinculado a uma estrutura matemática, um espaço euclidiano. Assim, em nosso ponto de vista, o conceito de posição é um conceito derivado, necessita da teoria matemática para ser definido.

Por outro lado, definir um conceito a partir da estrutura matemática exige que a própria estrutura seja devidamente compreendida e explorada. A teoria matemática cria, neste sentido, um terreno abstrato. É neste terreno que os conceitos primitivos e derivados são posicionados e, assim, a teoria física toma vida própria.

Existem, de fato, duas estruturas matemáticas conhecidas como $\mathbb{R}^3$. A primeira dessas estruturas é uma **variedade diferenciável**; um espaço de pontos no qual é possível definir curvas suaves. Como veremos, esta propriedade será de importância fundamental para a descrição do movimento. Por outro lado, o espaço euclidiano é também um **espaço vetorial**. Portanto, a posição de uma partícula clássica também pode ser representada pelos tão conhecidos vetores euclidianos, com todas as suas propriedades. Trataremos dessas propriedades mais adiante.

Vamos, primeiro, tratar do espaço $\mathbb{R}^3$ como uma variedade. O protótipo do espaço euclidiano é a reta real $\mathbb{R}$, que consiste em uma representação do conjunto dos número reais sobre uma reta (fig 1).

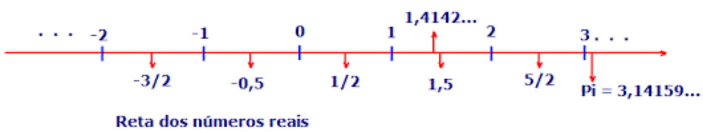

Figura 1: A reta real. De IQ-UNESP.

A reta real, por definição, é o **espaço euclidiano unidimensional**, ou o primeiro espaço euclidiano, denotado por $\mathbb{R}$. Como o conjunto dos números reais possui uma **ordem**, a reta real é um espaço ordenado e, assim, possui uma topologia natural de intervalos abertos: dois números reais a e b, tais que $b > a$, definem intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} .$$

A reta real, apesar de ilimitada, pode ser coberta por intervalos abertos, de modo que a união de abertos é um aberto, e a interseção de um número finito de abertos é também um aberto. Essas propriedades são as definidoras de um espaço topológico.

Uma segunda propriedade fundamental da reta real é a de que a ordem inerente aos números reais induz a uma forma natural de se definir a distância entre dois pontos. Esta forma é dada pela diferença absoluta, ou módulo:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \ |a - b| = \begin{cases} a - b \quad amp; \text{se } a < b, \\ b - a \quad amp; \text{se } b < a. \end{cases}$$

A existência desta função define o primeiro espaço euclidiano como um espaço métrico.

Existem sistemas físicos que podem ser encaixados, mesmo agora, no espaço euclidiano de uma dimensão. São aqueles vinculados a se mover sobre uma reta, como por exemplo o sistema massa-mola. Este sistema consiste em um corpo de massa M preso a uma extremidade de uma mola, que por outro lado está presa a um anteparo, como no caso da fig 2.

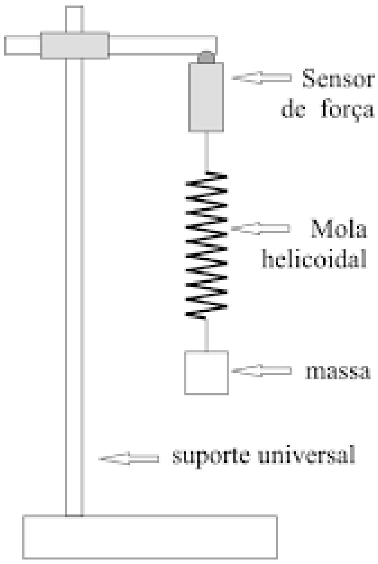

Figura 2: Sistema massa-mola. De UEL.

O produto cartesiano

Como dissemos anteriormente, a reta real é o protótipo do espaço euclidiano. No caso de $\mathbb{R}$, este espaço é definido pelo conjunto dos números reais com a topologia da reta, ou equivalentemente, pela métrica descrita pelo módulo.

Os demais espaços euclidianos podem ser construídos a partir da reta real e de um produto cartesiano. Sejam dois pontos $a, b \in \mathbb{R}$, podemos construir uma lista ordenada (a, b). Neste caso, $(a, b) \neq (b, a)$. O conjunto de todas as listas ordenadas bi-dimensionais, ou bi-ordenadas, forma um conjunto de pontos denominado espaço euclidiano bidimensional, ou simplesmente o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Dizemos que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R},$$

em que $\otimes$ denota o produto cartesiano.

Portanto, cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$ é representado por uma dupla ordenada (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$. Esta relação é representada simplesmente por $x \equiv (a, b)$. Portanto, a posição de uma partícula em um sistema bi-dimensional é mapeada no plano cartesiano, em que cada ponto constitui em dois números reais ordenados. Um exemplo físico de um sistema bidimensional vem a ser o bem conhecido pêndulo simples.

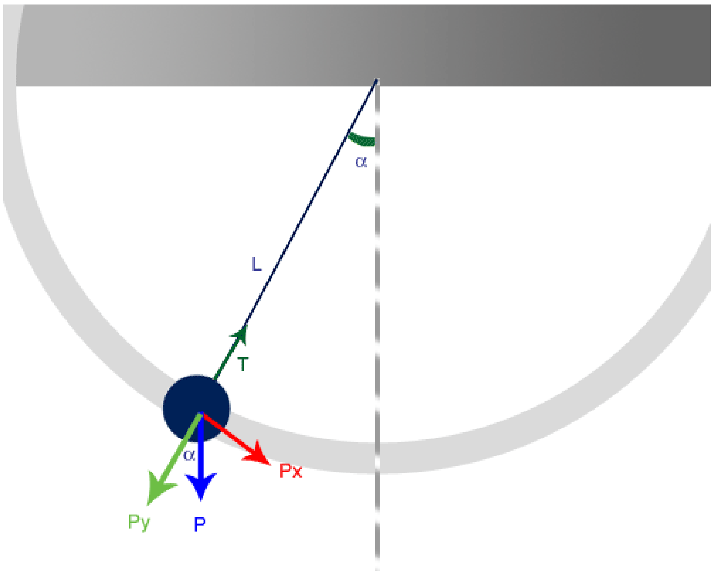

Figura 3: O pêndulo simples.

Podemos, também, definir uma forma de se medir a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^2$. Se nos reportarmos à função que faz o mesmo trabalho em $\mathbb{R}$, a função módulo, poderíamos ser tentados a utilizar a seguinte função:

$$D(x, y) \equiv |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| , \tag{1}$$

em que

$$x, y \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \equiv (x_1, x_2) , \quad y \equiv (y_1, y_2) .$$

A função (**??**) define uma boa métrica: ela é simétrica $D(x, y) = D(y, x)$, é sempre positiva e é nula se, e somente se, $x = y$. Contudo, esta não é uma métrica aceitável fisicamente.

Para compreender por que não podemos utilizar a métrica (**??**) para calcular a distância entre dois pontos, devemos apelar à observação e à experiência. Na antiga Grécia, a observação da geometria plana da natureza levou ao principal resultado da geometria euclidiana: o Teorema de Pitágoras:

O Teorema de Pitágoras: Sejam b e c dois catetos de um triângulo retângulo. Neste caso, a hipotenusa a é calculada por

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Assim como no caso unidimensional, o espaço $\mathbb{R}^2$ também possui uma representação gráfica, através do plano cartesiano da fig. 4.

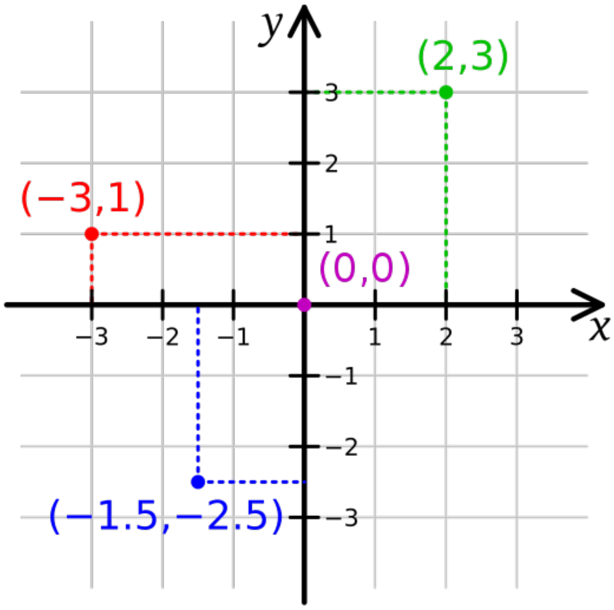

Figura 4: O plano cartesiano representado como a interseção entre duas retas reais. Neste gráfico, x é a variável que representa a reta horizontal, ou coordenada abscissa. A variável y é aquela que representa a reta vertical, ou ordenada.

$D(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.exemplo, se desejamos calcular a distância entre os pontos $(2, 3)$ e $(-3, 1)$ no plano da fig. 4, basta desenharmos um triângulo retângulo com o cateto maior no eixo das abscissas (eixo 1, ou eixo x), do ponto $(-3, 1)$ ao ponto $(2, 1)$. O cateto menor deve ser desenhado paralelo ao eixo das coordenadas (eixo 2, ou eixo y), do ponto $(2, 1)$ ao ponto $(2, 3)$. Neste caso, temos

$$D = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{29}.$$

De forma geral, a distância euclidiana entre dois pontos $x \equiv (x_1, x_2)$ e $y \equiv (y_1, y_2)$ é calculada pela função

$$D(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

O espaço $\mathbb{R}^3$

Com o produto cartesiano, podemos utilizar a reta real para construir espaços de dimensão maiores que 2. O espaço que nos interessa, contudo, é o espaço euclidiano tridimensional

$$\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^2.$$

Os pontos do espaço $\mathbb{R}^3$ são representados por triplas ordenadas (x, y, z) ou (x_1, x_2, x_3), dependendo da notação utilizada sobre os eixos coordenados.

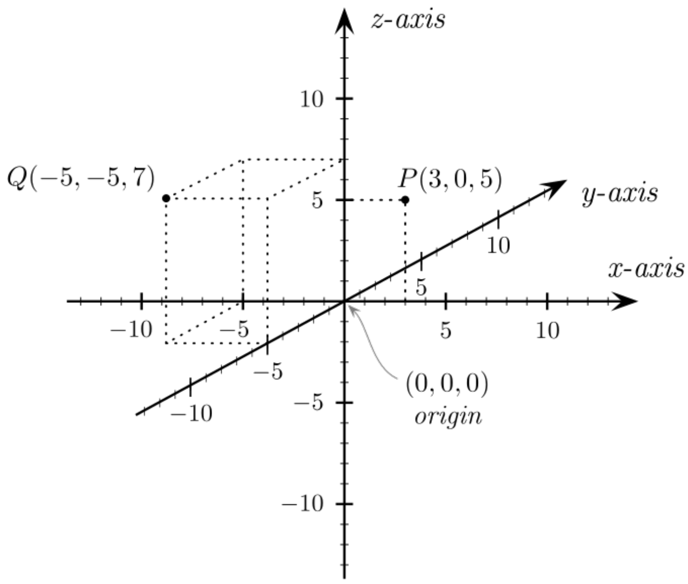

Figura 5: Representação gráfica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Cada reta real é representada por um eixo coordenado, os eixos x, y e z. Também utilizaremos as notações (x_1, x_2, x_3) ou (e_1, e_2, e_3) para os mesmos eixos.

A métrica euclidiana em $\mathbb{R}^3$

Mais uma vez, uma métrica que possibilite calcular a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^3$ é necessária. E mais uma vez esta métrica deve ser coerente com o teorema de Pitágoras. Assim, podemos introduzir o segundo postulado:

> **Postulado 2:** A distância entre duas partículas, cujas posições são representadas respectivamente pelos pontos $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $y \equiv (y_1, y_2, y_3)$, é dada pela hipotenusa do triângulo retângulo no qual um dos catetos é representado pela distância $|y_3 - x_3|$ no eixo e_3, e o outro cateto é representado pela hipotenusa do triângulo retângulo formato pelos catetos de distância $|y_1 - x_1|$, no eixo e_1, e pelo cateto de distância $|y_2 - x_2|$ no eixo e_2. Neste caso,
>
> $$D\left(x,y\right) = \sqrt{\left(y_1 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - x_2\right)^2 + \left(y_3 - x_3\right)^2}.$$

A métrica definida em (**??**) é um tipo de função denominado **função de dois pontos**. Como o espaço tem três dimensões, a métrica é uma função de seis variáveis,

$$D(x,y) = D(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3).$$

Esta função obedece às propriedades de uma boa métrica:

1. Simetria: $D(x,y) = D(y,x)$;
2. Positividade: $D(x,y) \geq 0$;
3. Não degenerescência: $D(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.