Optical solutions to the Kundu-Mukherjee-Naskar equation: mathematical and graphical analysis with oblique wave propagation

Dipankar Kumar[1], Gour Paul[2], Tapsh Biswas[1], Aly Seadawy[3], Rakib Baowali[1], Mostafa Kamal[1], and Hadi Rezazadeh[4]

[1]Bangabandhu Sheikh Mujibur Rahman Science and Technology University
[2]University of Rajshahi
[3]Taibah University
[4]Amol University of Special Modern Technologies

August 12, 2020

Abstract

This paper retrieves some new optical solutions to the Kundu–Mukherjee–Naskar (KMN) equation in the context of nonlinear optical fiber communication systems. In this regard, the generalized Kudryashov and new auxiliary equation methods are applied to the KMN equation and consequently, dark, bright, periodic U-shaped and singular soliton solutions are explored. The discrepancies between the present obtained solutions and the previously obtained solutions by using different methods are discussed. The time fractional derivative and an oblique wave transformation in coordination with the methods of interest are considered for acquiring new optical wave solutions of the KMN equation in the sense of conformable derivative and wave obliqueness, respectively. The effects of obliqueness and fractionality on the attained solutions are demonstrated graphically along with its physical descriptions. It is found that the optical wave phenomena are changed with the increase of obliqueness as well as fractionality. All the obtained optical solutions are found to be new in the sense of conformable derivative, wave obliqueness, and the applied methods. Finally, it is found that the utilized methods and the relevant transformation are powerful over the other methods and it can be applicable for further studies to explain the pragmatic phenomena in optical fiber communication systems.

1. Introduction

1.1 Background and literature review

To study of optical soliton is a dynamic research area in the fields of mathematical physics [1] and fiber optic communication systems [2]. It can play a vital role in the telecommunication industry to explain the soliton propagation effect in optical fibers and their impact on optical fiber communication systems. In the context of fiber optics, the relevant models can explain the propagation of soliton pulses through intercontinental distances. The dynamics of soliton propagation through nonlinear optics, optical fibers, metamaterials, and crystals are described by several model equations, such as the nonlinear unstable Schrödinger's equation [3], Sasa–Satsuma equation [4], complex Ginzburg–Landau equation [5], perturbed Gerdjikov–Ivanov equation [6], Lakshmanan–Posezian–Daniel equation [7, 8], Chen–Lee–Liu equation [9–11], Liquid crystals equation [12] and several others. It is worth mentioning that some researchers have studied a number of various known models and investigated their corresponding soliton dynamics via diverse analytical methods, viz. the Kudryashov method [13–15], the generalized Kudryashov method [16], the extended Kudryashov method [17], the trial solution method [18], the extended trial equation method [19], the modified simple equation method

[20], the sine-Gordon expansion equation method [21, 22], the extended sinh-Gordon equation expansion method [23–25], simplest equation method [26], the extended simplest equation method [27], new extended direct algebraic method [28], new auxiliary equation expansion method [29] and so on. This paper deals with one of such models viz. the Kundu–Mukherjee–Naskar (KMN) equation, which can be applied to address optical wave propagation through coherently excited resonant waveguides in particular in the phenomena of bending of light beams [19]. It is also used to address the problems of hole waves and oceanic rogue waves [30]. The model can further find to be applicable to the study of soliton pulses occurring in (2+1)-dimensional equations [31]. The most important feature of this model is that it has been given as a new extension of nonlinear Schrödinger (NLS) equation with the inclusion of different forms of nonlinearity with regard to Kerr and non-Kerr law nonlinearities to study soliton pulses in (2+1)-dimensions [31, 32]. Recently, solitons in KMN equation have been addressed by several researchers to recover some optical solitons using trial equation technique [33], extended trial function method [19], ansatz approach and sine Gordon expansion method [34], F-expansion and functional variable principle [35], new extended algebraic method [36], the method of undetermined coefficients and Lie symmetry [37], modified simple equation approach [20, 38] and first integral method [39]. As a result, investigators have reported some new optical solutions such as dark, bright, singular type soliton solutions. However, no studies have been found to investigate the optical solutions to the KMN equation by using the generalized Kudryashov method (gKM) and new auxiliary equation method (NAEM).

1.2. Objective of the study

The aim of this study is to adopt the gKM and newly developed NAEM to secure some new optical solutions, namely dark, bright, periodic U-shaped and singular soliton solutions to the KMN equation that can be of great importance in the field of fiber optics and optical communications. Furthermore, our intension is to implement the conformable derivative and wave oblique complex transform in coordination with the mentioned methods of interest to the KMN equation for obtaining new optical solutions in the sense of fractional derivative and wave obliqueness.

1.3. Governing equation

The dimensionless form of (2+1)-dimensional KMN equation is [33–38]

$iQ_t \ + \ pQ_{\mathrm{xy}} \ + \ iqQ \ (QQ_x^* \ - \ Q^*Q_x) \ = \ 0.$(1.1)

The KMN equation specified by (1.1) was introduced by Kundu et al. [30], which is a new extension of the well-known NLS equation. In Eq. (1.1), x and y stand for the spatial variables while $t$designates the temporal variable. The dependent variable$Q(x,\ y,\ t)$ represents nonlinear wave envelope, where the asterisk denotes the complex conjugate of Q. The first term in Eq. (1.1) stands for denoting the temporal evolution of the wave followed by the dispersion term that is given by the coefficient of p. The constant$q$ ensures the existence of the different case of nonlinearity media which does not fall into the conventional Kerr law nonlinearity or any known non-Kerr law media [31]. The nonlinear term in this equation accounts for "current–like" nonlinearity that stems from chirality [33].

1.4. Application of complex transformation to the KMN equation

In order to get optical solutions of Eq. (1.1), the following transformation is selected [33–38]

$Q(x,\ y,\ t) \ = \ U(\xi)e^{i\eta(x,y,t)}$, (1.2)

where $U(\xi)$ represents the amplitude component with$\xi = \ l_1x \ + \ l_2y \ \ vt$, the phase component$\eta\,(x,\ y,\ t)$ of the soliton is defined as$\eta\,(x,\ y,\ t) = \ -h_1x \ - h_2y \ + \ \omega t \ + \ \theta_0$with $i = \sqrt{-1}$. Here, h_1 and h_2 refer to the frequencies of the soliton in the x- and y-directions, respectively, while ω and θ_0 , respectively, correspond to the wave number and phase of the soliton. Also, the parameters l_1 and l_2 in Eq. (1.2) represent the inverse width of the soliton along the x and y directions, respectively, while v represents the velocity of the soliton. Plugging the above transformation into KMN equation specified by Eq. (1.1) and decomposing into real and imaginary parts, the following pair of equations are attained:

$\alpha l_1 l_2 U'' \ - \ (\omega + \ \alpha h_1 h_2)\, U \ \ 2\beta h_1 U^3 \ = \ 0$ (1.3)

and $v \ = \ -p\ (l_1 h_2 \ + \ l_2 h_1)$, (1.4)

where a prime denotes the derivative with respect to ξ.

1.5. Arrangement of the study

The rest part of the paper is organized as follows. Section 2 deals with the overview of the gKM and NAUM. Applications of these methods and two important remarks are presented in Section 3. The graphical analysis of the obtained solutions is elaborated in Section 4. Finally, a general discussion and conclusion are placed in Section 5.

2. Overview of the methods

In this section, we will recount the workflow of the gKM and NAEM to investigate some new optical solutions to a nonlinear evolution equation (NLEE).

Assume a general (2+1)-dimensional NLEE in the following form:

$P(Q, Q_x, Q_y, Q_t, Q_{\mathrm{xx}}, Q_{\mathrm{xy}}, Q_{\mathrm{xt}}, Q_{\mathrm{yt}}, Q_{\mathrm{tt}}, Q_{\mathrm{xtt}}, \ldots\ldots) = 0$, (2.1)

where $Q = Q(x, y, t)$ is an unknown function of complex-valued, $P$is a polynomial of $Q(x, y, t)$, and its various partial derivatives, in which the linear and nonlinear partial derivatives are involved.

With the introduction of the transformation$Q\,(x, y, t) \ = \ U(\xi)e^{i\eta(x,y,t)}$, where $\xi \ = \ \ l_1 x \ + \ l_2 y \ \ vt$, and$\eta\,(x,\ y,\ t) \ = \ -h_1 x \ - h_2 y \ + \ \omega t \ + \ \theta_0$, Eq. (2.1) is converted to the following nonlinear ordinary differential equation (ODE):

$O\left(U, U', U"\ \ldots\ldots\ldots\right) = 0$, (2.2)

where O is a polynomial of U and its derivatives, and the superscripts indicate the total derivatives with respect to ξ.

2.1. Overview of the generalized Kudryashov method (gKM)

The main steps of the gKM are as follows [16]:

Let us assume that the solution $U\,(\xi)$ of the nonlinear Eq. (2.2) can be presented as

$U\,(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i R^i(\xi)}{\sum_{j=0}^{M} b_j R^j(\xi)}$. (2.3)

In Eq. (2.3), the constants$a_i \ \ (i = 0,\ 1,\ 2\ldots, N)$ and$b_j \ \ (j = 0,\ 1,\ 2\ldots, M)$ are to be determined later. M and N are positive integers which can be computed by means of homogenous balance principle, and $R(\xi)$ satisfies the following ODE:

$R'\,(\xi) = \left(R^2\,(\xi) - R\,(\xi)\right)\ \ln(a)$. (2.4)

Equation (2.4) yields the exact solution$R\,(\xi) = \frac{1}{(1+da^{\xi})}$, where$a \neq 0,\ 1$ and $d \neq 0$.

Substituting Eq. (2.3) along with Eq. (2.4) into Eq. (2.2) and using some mathematical operations, we get a system of algebraic equations. Solving the attained system and setting the obtained values in Eq. (2.3), one can produce exact solutions of Eq. (2.1).

2.2. Overview of the new auxiliary equation method (NAEM)

The main outlines of the NAEM are as follows [29]:

Let us assume that the solution $U\,(\xi)$ of the nonlinear Eq. (2.2) can be presented as

$U\,(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i \left(a^{f(\xi)}\right)^i$, (2.5) where the constant coefficientsa_i $(i = 0,\ 1,\ 2\ldots, N)$ are to be determined and$N$ is a positive integer which can be computed by means of homogenous balance principle. For Eq. (2.5), $f(\xi)$ satisfies the following ODE:

$f^{'}(\xi) = \frac{1}{\ln(a)}\left(\alpha a^{-f(\xi)} + \beta + \sigma a^{f(\xi)}\right)$. (2.6)

Equation (2.6) yields the following family of solutions:

Family-I: When $\beta^2 - 4\alpha\sigma\ < 0$ and$\sigma \neq 0$,

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2}\xi\right).$

Family-II: When $\beta^2 - 4\alpha\sigma > 0$ and$\sigma \neq 0$,

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}\xi\right).$

Family-III: When $\beta^2 + 4\alpha^2 < 0$,$\sigma = -\alpha$ and $\sigma \neq 0$,

$a^{f(\xi)} = \frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = \frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right).$

Family-IV: When $\beta^2 + 4\alpha^2 > 0$,$\sigma = -\alpha$ and $\sigma \neq 0$,

$a^{f(\xi)} = \frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = \frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right).$

Family-V: When $\beta^2 - 4\alpha^2 < 0$ and$\sigma = \alpha$,

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right).$

Family-VI: When $\beta^2 - 4\alpha^2 > 0$ and$\sigma = \alpha$,

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = -\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\coth\left(\frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right).$

Family-VII: When $\alpha\sigma > 0,\ \beta = 0$ and$\sigma \neq 0$,

$a^{f(\xi)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\tan\left(\sqrt{\alpha\sigma}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\cot\left(\sqrt{\alpha\sigma}\xi\right).$

Family-VIII: When $\alpha\sigma < 0,\ \beta = 0$ and$\sigma \neq 0$,

$a^{f(\xi)} = \sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}} \tanh\left(\sqrt{-\alpha\sigma}\xi\right),$

$a^{f(\xi)} = \sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}} \coth\left(\sqrt{-\alpha\sigma}\xi\right).$

Family-IX: When $\beta^2 - 4\alpha\sigma = 0,$

$a^{f(\xi)} = \frac{-2\alpha(\beta\xi+2)}{\beta^2\xi}.$

Family-X: When $\beta = 0$ and $\alpha = -\sigma,$

$a^{f(\xi)} = \frac{e^{2\alpha\xi}+1}{e^{2\alpha\xi}-1}.$

Family-XI: When $\alpha = \sigma = 0,$

$a^{f(\xi)} = -\frac{e^{2\beta\xi}+1}{2e^{\beta\xi}}.$

Family-XII: When $\alpha = 2K$, $\beta = K$ and$\sigma = 0,$

$a^{f(\xi)} = e^{\mathrm{K}\xi} - 2.$

Φαμιλψ-ΞΙΙΙ: Ωηεν $\sigma = K$, $\beta = K$ ανδ$\alpha = 0,$

$a^{f(\xi)} = \frac{e^{\mathrm{K}}}{1-e^{\mathrm{K}}}.$

Φαμιλψ-ΞΙΙΙ: Ωηεν $\alpha = 0,$

$a^{f(\xi)} = \frac{\beta e}{2-\sigma e}.$

Φαμιλψ-ΞΙ΄΄: Ωηεν $\beta = \sigma = 0,$

$a^{f(\xi)} = \alpha\xi.$

Φαμιλψ-Ξ΄΄: Ωηεν $\beta = \alpha = 0,$

$a^{f(\xi)} = -\frac{1}{\sigma\xi}.$

Φαμιλψ-Ξ΄΄Ι: Ωηεν $\beta = 0$ ανδ $\alpha = \sigma,$

$a^{f(\xi)} = tan\left(\alpha\xi + E\right).$

Φαμιλψ-Ξ΄΄ΙΙ: Ωηεν $\sigma = 0,$

$a^{f(\xi)} = e^{\beta\xi} - \frac{\alpha}{\beta}.$

Πλυγγινγ Εχς. (2.5) ανδ (2.6) ιντο Εχ. (2.2) ανδ ςολλεςτινγ αλλ τηε τερμς ηαινγ τηε ποωερς οφ $a^{\iota\varphi(\xi)}(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots)$ το ζερο, α σψστεμ οφ αλγεβραις εχυατιονς ις ορταινεδ. Τηις σψστεμ ςαν βε προβεδ το δετερμινε τηε αλυες οφ$a_i,\ \omega$ ανδ οτηερς ιν Εχ. (2.2), ωηιςη φιναλλψ προδυςε εξαςτ σολυτιονς το Εχ. (2.1).

3. Οπτιςαλ σολυτιονς: ματηεματιςαλ αναλψσις

Ιν τηις σεςτιον, τηε αππλιςατιον οφ τηε αβοε-μεντιονεδ μετηοδς το τηε (2+1)-Δ ΚΜΝ εχυατιον ις δισςυσσεδ φορ εστιματινγ νεω οπτιςαλ σολυτιονς.

3.1. Αππλιςατιον οφ τηε γενεραλιζεδ Κυδρψασηο μετηοδ

Βαλανςινγ τηε ορδερς οφ τηε λινεαρ τερμ $U^{''}$ανδ τηε νονλινεαρ τερμU^3 ιν Εχ. (1.3), ωε ηαε $N = M + 1$.Σο, τηε σολυτιον οφ Εχ. (1.3) ςαν βε πυτ ιν τηε φολλοωινγ φορμ ιφ ωε ςηοοσε $M = 1$:

$U\left(\xi\right) = \frac{a_0+a_1R(\xi)+a_2R^2(\xi)}{b_0+b_1R(\xi)}.$ (3.1)

Ιν Εχ. (3.1), τηε ςονσταντς a_i $(i = 0,\ 1,\ 2)$ ανδb_j $(j = 0,\ 1)$ αρε το βε δετερμινεδ λατερ ανδ$R(\xi)$ σατισφιες τηε ΟΔΕ σπεςιφιεδ βψ Εχ. (2.2).

Πυττινγ Εχ. (3.1) ωιτη τηε αιδ οφ Εχ. (2.2) ιντο Εχ. (1.3) ανδ υσινγ σομε ματηεματιςαλ οπερατιονς, ωε γετ α σψστεμ οφ αλγεβραις εχυατιονς. Σολινγ τηε εμανατεδ σψστεμ οφ εχυατιονς, ωε οβταιν τηε φολλοωινγ σολυτιον σετς:

Σετ-Ι: $a_0=0, a_1=\mp\frac{1}{2}\frac{pb_1l_1l_2\ \lambda\nu(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}, a_2=\pm b_1\ln(a)\ \sqrt{\frac{pl_1l_2}{qh_1}}, b_0=0,$

$\omega=-\frac{1}{2}p\left(l_1l_2\left(\ln(a)\right)^2+2h_1h_2\right)$, ανδ b_1 ις φρεε.

Σετ-ΙΙ: $a_0=0, a_1=\pm 2b_0\ln(a)\ \sqrt{\frac{pl_1l_2}{qh_1}}, a_2=\mp 2b_0\ln(a)\ \sqrt{\frac{pl_1l_2}{qh_1}}, b_1=-2b_0,$

$\omega=p\left(l_1l_2\left(\ln(a)\right)^2-h_1h_2\right)$, ανδ b_0 ις φρεε.

Σετ-ΙΙΙ: $a_0=0, a_1=\pm\frac{b_1\ln(a)}{2}\frac{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}, a_2=\mp\frac{pl_1l_2\ln(a)\ b_1}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}, b_0=0,$

$\omega=-\frac{1}{2}p\left(l_1l_2\left(\ln(a)\right)^2+2h_1h_2\right)$, ανδ b_1 ις φρεε.

Σετ-Ι῞: $a_0=\pm\frac{b_0\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}, a_1=\mp\frac{2b_0\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}, a_2=\pm\frac{2pl_1l_2b_0\ln(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}, b_1=-2b_0, \omega=-p\left(2l_1l_2\left(\ln(a)\right)^2+h_1h_2\right)$, ανδ b_0 ις φρεε.

Σετ-῞: $a_0=\pm\frac{1}{2}\frac{b_0\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}, a_1=0, a_2=\mp\frac{2pl_1l_2b_0\ln(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}, b_1=2b_0,$

$\omega=-\frac{1}{2}p\left(l_1l_2\left(\ln(a)\right)^2+2h_1h_2\right)$, ανδ b_0 ις φρεε.

Σετ-῞Ι: $a_2=-\left(4a_0+2a_1\right), b_0=\pm\frac{2qh_1a_0}{\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}},\ b_1=\pm\frac{2\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}(2a_0+a_1)}{pl_1l_2\ln(a)},$

$\omega=-\frac{1}{2}p\left(l_1l_2\left(\ln(a)\right)^2+2h_1h_2\right)$, ανδ a_0, a_1 αρε φρεε.

ὃνσεχυεντλψ, τηε αβοε σετς (Ι-῞Ι) ρετριεε τηε φολλοωινγ οπτιςαλ σολυτιονς:

$$Q_{1,2}(x,y,t)=\frac{\mp\left(\frac{1}{2}\frac{pb_1l_1l_2\ \lambda\nu(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}\frac{1}{(1+da^{\xi})}-b_1\ln(a)\ \sqrt{\frac{pl_1l_2}{qh_1}}\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{\frac{b_1}{(1+da^{\xi})}}\times e^{i\left(-h_1x\ -h_2\psi\ -\frac{1}{2}p\left(l_1l_2(\ln(a))^2+2h_1h_2\right)t+\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{3,4}(x,y,t)=\frac{\pm 2b_0\ln(a)\ \sqrt{\frac{pl_1l_2}{qh_1}}\left(\frac{1}{(1+da^{\xi})}-\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{b_0\left(1-\frac{2}{(1+da^{\xi})}\right)}\times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y+p\left(l_1l_2(\ln(a))^2-h_1h_2\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{5,6}(x,y,t)=\frac{\pm\left(\frac{b_1\ln(a)}{2}\frac{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}\frac{1}{(1+da^{\xi})}-\frac{pl_1l_2\ln(a)\ b_1}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{\left(\frac{b_1}{(1+da^{\xi})}\right)}\times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y-\frac{p}{2}\left(l_1l_2(\ln(a))^2+2h_1h_2\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{7,8}(x,y,t)=\frac{\pm\left(\frac{b_0\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}-\frac{2b_0\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}\frac{1}{(1+da^{\xi})}+\frac{2pl_1l_2b_0\ln(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{b_0\left(1-\frac{2}{(1+da^{\xi})}\right)}\times e^{i\left(-h_1x\ -h_2\psi\ -p\left(2l_1l_2(\ln(a))^2+h_1h_2\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{9,10}(x,y,t)=\frac{\pm\left(\frac{1}{2}\frac{b_0\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}{qh_1}-\frac{2pl_1l_2b_0\ln(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1l_1l_2}}\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{b_0\left(1+\frac{2}{(1+da^{\xi})}\right)}\times e^{i\left(-h_1x\ -h_2\psi\ -\frac{1}{2}p\left(l_1l_2(\ln(a))^2+2h_1h_2\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{11,12}(x,y,t) = \frac{a_0 + \frac{a_1}{(1+da^{\xi})} - \frac{(4a_0+2a_1)}{(1+da^{\xi})^2}}{\pm\left(\frac{2qh_1 a_0}{\ln(a)\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}} + \frac{2\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}(2a_0+a_1)}{pl_1 l_2 \ln(a)} \frac{1}{(1+da^{\xi})}\right)} \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 \psi \ - \frac{h_1}{b_1^2}\left(pb_1^2 h_2 + 2qa_1^2\right)t \ + \ \theta_0\right)},$$

ωηερε$\xi = \ l_1 x \ + \ l_2 y + p\,(l_1 h_2 \ + \ l_2 h_1)t$ φορ αλλ τηε οπτιςαλ σολυτιονς πρεσεντεδ ιν τηις συβσεςτιον.

3.2. Απλιςατιον οφ τηε νεω αυξιλιαρψ εχυατιον μετηοδ

Βαλανςινγ τηε ορδερς οφ τηε λινεαρ τερμ U'' ανδ τηε νονλινεαρ τερμU^3 ιν Εχ. (1.3), ωε ηαε $N = 1$. Σο, τηε σολυτιον οφ Εχ. (1.3) ςαν βε ρεπρεσεντεδ ιν τηε φολλοωινγ φορμ:

$U(\xi) = a_0 + a_1 a^{f(\xi)}$, (3.2)

ωηερε a_0 ανδ a_1 αρε ςονσταντς το βε δετερμινεδ λατερ ανδ$f(\xi)$ σατισφιες τηε ΟΔΕ σπεςιφιεδ βψ Εχ. (2.6).

Πλυγγινγ Εχ. (3.2) αλονγ ωιτη Εχ. (2.6) ιντο Εχ. (1.3) ανδ ςολλεςτινγ αλλ τηε τερμς ηαινγ τηε ποωερς οφ $a^{\iota\varphi(\xi)}(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ το ζερο, α σψστεμ οφ αλγεβραις εχυατιονς ις οβταινεδ. Σολινγ τηε σψστεμ οφ εχυατιονς, ωε γετ τηε φολλοωινγ σολυτιον σετ:

$a_0 = \pm\frac{\beta}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}$,$a_1 = \pm\frac{\sigma}{qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}$ ανδ$\omega = \frac{1}{2}p\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)$.

Πυττινγ τηε σολυτιον σετ οφ αλγεβραις εχυατιονς ιντο Εχ. (1.2) αλονγ ωιτη Εχ. (3.2), τηε φολλοωινγ σολυτιον ις ρεςειεδ:

$Q(x,\ y,\ t) \ = \pm \ \frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma a^{f(\xi)}\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)}$, (3.3)

ωηερε$\xi = \ l_1 x \ + \ l_2 y + p\,(l_1 h_2 \ + \ l_2 h_1)t$.

Νοω ινσερτινγ τηε σολυτιονς οφ Εχ. (2.6) (**Φαμιλψ-Ι** το**Φαμιλψ-Ξ΄ΙΙ**) ιντο Εχ. (3.3), τηε φολλοωινγ σολυτιονς ηαε βεεν ρετριεεδ:

Φορ Φαμιλψ-Ι: Ωηεν $\beta^2 - 4\alpha\sigma \ < 0$ ανδ$\sigma \neq 0$,

$$Q_{1,2}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)},$$

$$Q_{3,4}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-ΙΙ: Ωηεν $\beta^2 - 4\alpha\sigma > 0$ ανδ$\sigma \neq 0$,

$$Q_{5,6}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)},$$

$$Q_{7,8}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2\sigma}\coth\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\sigma}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-ΙΙΙ: Ωηεν $\beta^2 + 4\alpha^2 < 0$,$\sigma = -\alpha$ ανδ $\sigma \neq 0$,

$$Q_{9,10}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)},$$

$$Q_{11,12}(x,y,t) = \pm \ \frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x \ -h_2 y \ + \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t \ + \ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-Ι″: Ωηεν $\beta^2 + 4\alpha^2 > 0$,$\sigma = -\alpha$ ανδ $\sigma \neq 0$,

$$Q_{13,14}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{15,16}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-″: Ωηεν $\beta^2 - 4\alpha^2 < 0$ ανδ$\sigma = \alpha$,

$$Q_{17,18}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\tan\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{19,20}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\cot\left(\frac{\sqrt{-(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-″Ι: Ωηεν $\beta^2 - 4\alpha^2 > 0$ ανδ$\sigma = \alpha$,

$$Q_{21,22}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\tanh\left(\frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{23,24}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} - \frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2\sigma}\coth\left(\frac{\sqrt{(\beta^2-4\alpha^2)}}{2}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-″ΙΙ: Ωηεν $\alpha\sigma > 0,\ \beta = 0$ ανδ$\sigma \neq 0$,

$$Q_{25,26}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\tan\left(\sqrt{\alpha\sigma}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{27,28}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma}}\cot\left(\sqrt{\alpha\sigma}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-″ΙΙΙ: Ωηεν $\alpha\sigma < 0,\ \beta = 0$ ανδ$\sigma \neq 0$,

$$Q_{29,30}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}}\tanh\left(\sqrt{-\alpha\sigma}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)},$$

$$Q_{31,32}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\sigma}}\coth\left(\sqrt{-\alpha\sigma}\xi\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-ΙΞ: Ωηεν $\beta^2 - 4\alpha\sigma = 0$,

$$Q_{33,34}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{-2\alpha(\beta\xi+2)}{\beta^2\xi}\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-Ξ: Ωηεν $\beta = 0$ ανδ $\alpha = -\sigma$,

$$Q_{35,36}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{e^{2\alpha\xi}+1}{e^{2\alpha\xi}-1}\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-ΞΙ: Ωηεν $\alpha = \sigma = 0$,

$$Q_{37,38}(x,y,t) = \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta - 2\sigma\left(\frac{e^{2\beta\xi}+1}{2e^{\beta\xi}}\right)\right) \times e^{i\left(-h_1x\ -h_2y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1l_2 - \beta^2 l_1l_2 - 2h_1h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$$

Φορ Φαμιλψ-ΞΙΙ: Ωηεν $\alpha = 2K$, $\beta = K$ ανδ$\sigma = 0$,

$Q_{39,40}(x,y,t) = \pm \frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(e^{K\xi} - 2\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$

Φορ Φαμιλψ-ΞΙΙΙ: Ωηεν $\sigma = K$, $\beta = K$ ανδ$\alpha = 0$,

$Q_{41,42}(x,y,t)\ =\ \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{e^{K}}{1-e^{K}}\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$

Φορ Φαμιλψ-ΞΙΙΙ: Ωηεν $\alpha = 0$,

$Q_{43,44}(x,y,t)\ =\ \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\frac{\beta e}{2-\sigma e}\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$

Φορ Φαμιλψ-Ξ῞Ι: Ωηεν $\beta = 0$ ανδ $\alpha = \sigma$,

$Q_{45,46}(x,y,t) = \pm \frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(\tan\left(\alpha\xi + E\right)\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$

Φορ Φαμιλψ-Ξ῞ΙΙ: Ωηεν $\sigma = 0$,

$Q_{47,48}(x,y,t)\ =\ \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(e^{\beta\xi} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right) \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)t\ +\ \theta_0\right)}.$

ωηερε$\xi =\ l_1 x\ +\ l_2 y + p\ (l_1 h_2\ +\ l_2 h_1)t$ φορ αλλ τηε οπτιςαλ σολυτιονς πρεσεντεδ ιν τηις συβσεςτιον.

Ρεμαρκ 1. ***Φορ τηε ςασε οφ ςονφορμαβλε δεριϖατιϖε***

ὃνσιδερ τηε τιμε φραςτιοναλ (2+1)-διμενσιοναλ KMN εχυατιον [33–38]:

$iD_t^{\tau}Q\ +\ pQ_{\xi\psi}\ +\ \iota\chi X\ \left(QQ_x^{*}\ -\ Q^{*}Q_x\right) =\ 0, i = \sqrt{-1}$, (3.4)

ωηερε D_t^{τ} δενοτες τηε ςονφορμαβλε δεριϖατιϖε οφ φραςτιοναλ ορδερ τ ωιτη ρεσπεςτ το t, ανδ $0 < \tau\ \leq\ 1$. Ωηεν ωε συβστιτυτε $\tau = 1$ ιν Εχ. (3.4), τηε τιμε φραςτιοναλ KMN εχυατιον ις ςονϖερτεδ το τηε ιντεγερ ορδερ KMN εχυατιον σπεςιφιεδ βψ Εχ. (1.1). Ασσυμε τηε φολλοωινγ ςομπλεξ τρανσφορματιον το τηε τιμε φραςτιοναλ (2+1)-Δ KMN εχυατιον:

$Q(x,\ y,\ t;\tau)\ =\ U(\xi)e^{\iota\eta(x,y,t)}, \xi =\ l_1 x\ +\ l_2 y\ \ v\frac{t^{\tau}}{\tau}$ ανδ$\eta = -h_1 x - h_2 y + \omega\frac{t^{\tau}}{\tau} +\ \theta_0$. (3.5)

Ωιτη τηε ηελπ οφ Κηαλιλ'ς δεφινιτιον [40], φεασιβλε προπερτιες [41] οφ τηε ςονφορμαβλε δεριϖατιϖε, ανδ α ςομπλεξ τρανσφορματιον σπεςιφιεδ βψ Εχ. (3.5), Εχ. (3.4) ις ςονϖερτεδ το τηε ιδεντιςαλ ΟΔΕ σπεςιφιεδ βψ Εχ. (1.3). Τηεν, τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ αρε αππλιεδ το τηε τιμε φραςτιοναλ KMN εχυατιον. Σιξτψ οπτιςαλ ωαϖε σολυτιονς αρε εξπλορεδ, ωηιςη αρε νεω ιν τηε σενσε οφ ςονφορμαβλε φραςτιοναλ δεριϖατιϖε. Σομε αππλιςατιονς οφ ςονφορμαβλε δεριϖατιϖε το ΝΠΔΕς αρε αϖαιλαβλε ιν ρεφς. [42–44]. Φορ τηε σακε οφ στραιγητφορωαρδνεσς, ωε ηαϖε ινςλυδεδ φουρ σολυτιονς οβταινεδ ϖια τηε γΚΜ ανδ τηε ΝΑΕΜ ιν τηε σενσε οφ ςονφορμαβλε φραςτιοναλ δεριϖατιϖε. Οπτιςαλ ωαϖε σολυτιονς οφ τηε τιμε φραςτιοναλ KMN εχυατιον βψ τηε γΚΜ αρε γιϖεν βελοω:

$Q_{1,2}(x,\ y,\ t;\tau)\ =\ \frac{\mp\left(\frac{1}{2}\frac{pb_1 l_1 l_2\ \ln(a)}{\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}}\frac{1}{(1+da^{\xi})} - b_1\ln(a)\ \sqrt{\frac{pl_1 l_2}{qh_1}}\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{\frac{b_1}{(1+da^{\xi})}} \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ -\frac{1}{2}p\left(l_1 l_2(\ln(a))^2 + 2h_1 h_2\right)\frac{t^{\tau}}{\tau} +\ \theta_0\right)},$
(3.6)

ωηερε$\xi =\ l_1 x\ +\ l_2 y + p\ (l_1 h_2\ +\ l_2 h_1)\frac{t^{\tau}}{\tau}$.

Οπτιςαλ ωαϖε σολυτιονς οφ τηε τιμε φραςτιοναλ KMN εχυατιον βψ τηε ΝΑΕΜ αρε γιϖεν βελοω:

Φορ Φαμιλψ-Ι : Ωηεν $\beta^2 - 4\alpha\sigma\ < 0$ ανδ$\sigma \neq 0$,

$Q_{1,2}(x,\ y,\ t;\tau)\ =\ \pm\frac{1}{2qh_1}\sqrt{\pi\chi h_1 l_1 l_2}\left(\beta + 2\sigma\left(-\frac{\beta}{2\sigma} + \frac{\sqrt{4\alpha\sigma - \beta^2}}{}\right.\right.$

ενγλιση$2\sigma\tan\left(\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{}\right.$

ενγλιση$2\xi \times e^{i\left(-h_1 x\ -h_2 y\ +\ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma l_1 l_2 - \beta^2 l_1 l_2 - 2h_1 h_2\right)\right)\frac{t^{\tau}}{\tau}\ +\ \theta_0\right)}$, (3.7)

ωηερε$\xi =\ l_1 x\ +\ l_2 y + p\ (l_1 h_2\ +\ l_2 h_1)\frac{t^{\tau}}{\tau}$.

Ρεμαρκ 2. ***Φορ τηϵ ςασϵ οφ ςονφορμαβλϵ δϵριατιϵ ανδ οβλιχυϵ ωαϵ σολυτιονς***

Ασσυμε τηε φολλοωινγ οβλιχυε ωαε τρανσφορματιον [45]:

$Q(x,\ y,\ t;\tau)\ =\ U(\xi)e^{\iota\eta(x,y,t)}$, (3.8)

ωηερεξ = $\cos(\theta)\,x\ +\sin(\theta)\,y\ \ v\frac{t^\tau}{\tau}$, ανδη = $-k\cos(\theta)\,x-\mathrm{k}\ \sin(\theta)\,y+\omega\frac{t^\tau}{\tau}+\ \theta_0$ωιτη$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$.

Υτιλιζινγ τηε οβλιχυε ωαε τρανσφορματιον σπεςιφιεδ βψ Εχ. (3.8) ιντο ςονφορμαβλε τιμε φραςτιοναλ ΚΜΝ εχυατιον σπεςιφιεδ βψ (3.4), τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς οφ τηε εχυατιον ςαν βε πυτ ιν τηε φολλοωινγ φορμ:

$\alpha\sin(\theta)\,U''\ -\ (\omega+\ \alpha k^2\sin(\theta))\ U\ \ 2\beta\varkappa\Upsilon^3\ =\ 0$ (3.9)

ανδ $v\ =\ -pk\sin(2\theta)$, (3.10)

ωηερε α πριμε δενοτες τηε ορδιναρψ δεριατιε ωιτη ρεσπεςτ το ξανδ θ πρεσεντς τηε ωαε οβλιχυενεσς.

Ρεςεντλψ, σομε σςηολαρς [45–47] αδοπτεδ τηε οβλιχυε ωαε τρανσφορματιον το τηε φραςτιοναλ ΠΔΕς φορ δετερμινινγ οβλιχυε ωαε σολυτιονς. Αφτερ υσινγ αν οβλιχυε ωαε τρανσφορματιον σπεςιφιεδ βψ Εχ. (3.8) ιντο τηε ΚΜΝ εχυατιον, τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ αρε αππλιεδ το Εχ. (3.9). Ας ουτςομες, σιξτψ οπτιςαλ ωαε σολυτιονς αρε προδυςεδ ιν τοταλ, ωηιςη αρε νεω ιν τηε σενσε οφ οβλιχυενεσς. Ρεςεντλψ, Ηαφεζ ετ αλ. [46] ινεστιγατεδ τηε πλανε ωαε προπαγατιον ιν τηε ξψ-πλανε βψ α σιμπλε σςηεματις διαγραμ, ωηερε τηεψ εμπηασιζεδ τηε ιμπορτανςε οφ οβλιχυενεσς ωιτη φραςτιοναλ τεμποραλ εολυτιον το σομε ΠΔΕς.

Το εξπλαιν τηε πηψσιςαλ βεηαιορς οφ φραςτιοναλιτψ ανδ ωαε οβλιχυενεσς, φουρ οβλιχυε ωαε σολυτιονς αρε ινςλυδεδ βψ μεανς οφ τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ. Οβλιχυε οπτιςαλ ωαε σολυτιονς το τηε τιμε φραςτιοναλ (2+1)-Δ ΚΜΝ εχυατιον αρε εξπλορεδ ια τηε γΚΜ ας

$$Q_{1,2}(x,\ y,\ t;\tau,\theta)\ =\ \frac{\mp\left(\frac{1}{2}\frac{pb_1\cos(\theta)\sin(\theta)\ \ \ln(a)}{\sqrt{\pi\chi\,\mathrm{k}\cos(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)}}\frac{1}{(1+da^{\xi})}-b_1\ln(a)\ \sqrt{\frac{p\sin(\theta)}{\chi\varkappa}}\frac{1}{(1+da^{\xi})^2}\right)}{\frac{b_1}{(1+da^{\xi})}}\ \times$$

$e^{i\left(-\ \mathrm{k}\cos(\theta)x\ \ -k\sin(\theta)y\ \ -\frac{1}{2}p\cos(\theta)\sin(\theta)\left((\ln(a))^2+2k^2\right)\frac{t^\tau}{\tau}+\ \theta_0\right)}$. (3.11)

Ον τηε οτηερ ηανδ, οβλιχυε οπτιςαλ ωαε σολυτιονς το τηε τιμε φραςτιοναλ (2+1)-Δ ΚΜΝ εχυατιον αρε εξπλορεδ ια τηε ΝΑΕΜ ας φολλοως φορ Φαμιλψ-Ι: Ωηεν $\beta^2-4\alpha\sigma\ <0$ ανδ $\sigma\neq0$,

$Q_{1,2}(x,\ y,\ t;\tau,\theta)\ =\ \pm\frac{1}{2q\,\mathrm{k}\cos(\theta)}\sqrt{\pi\chi\varkappa\cos^2(\theta)\sin(\theta)}\Bigg(\beta+2\sigma\Bigg(-\frac{\beta}{2\sigma}+\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{}$

ενγλιση$2\sigma\tan\Bigg(\frac{\sqrt{4\alpha\sigma-\beta^2}}{}$

ενγλιση$2\xi\times e^{i\left(-k\cos(\theta)x\ \ -k\sin(\theta)y\ \ +\cos(\theta)\sin(\theta)\ \ \left(\frac{p}{2}\left(4\alpha\sigma-\beta^2-2k^2\right)\right)\frac{t^\tau}{\tau}\ +\ \theta_0\right)}$, (3.12)

ωηερεξ = $\cos(\theta)\,x\ +\ \sin(\theta)\,y+pk\sin(2\theta)\,\frac{t^\tau}{\tau}$φορ τηε βοτη σολυτιονς γιεν βψ Εχς. (3.11) ανδ (3.12).

Ρεμαρκ 3. Ιτ ις ρεμαρκαβλε το νοτε ηερε τηατ αλλ τηε οβταινεδ οπτιςαλ σολυτιονς οφ τηε στυδιεδ εχυατιον αρε εριφιεδ βψ πυττινγ τηεμ βαςκ το τηε οριγιναλ εχυατιον ανδ φουνδ τηεμ αςςυρατε.

4. Γραπηιςαλ αναλψσις οφ τηε οβταινεδ οπτιςαλ σολυτιονς

Ιν τηις σεςτιον, πηψσιςαλ δεσςριπτιονς οφ σομε οφ τηε αςχυιρεδ οπτιςαλ ωαε σολυτιονς το τηε ΚΜΝ εχυατιον ια τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ ωιτη ιντεγερ ορδερ, φραςτιοναλ ορδερ ανδ ςονσιδερινγ ωαε οβλιχυενεσς ςονδιτιον αρε εξπλαινεδ γραπηιςαλλψ. Τωελε αλιδ αναλψτις οπτιςαλ σολυτιονς αρε ατταινεδ βψ τηε γΚΜ ανδ φορτψ-ειγητ αλιδ αναλψτις οπτιςαλ σολυτιονς αρε οβταινεδ βψ τηε ΝΑΕΜ. Βυτ, α φεω νυμβερς οφ τηε ρεπρεσεντατιε σολυτιονς οβταινεδ βψ τηε μετηοδς οφ ιντερεστ αρε εξπλαινεδ φορ τηε σακε οφ βρειτψ.

4.1. Γραπηιςαλ εξπλανατιον οφ τηε γΚΜ οβταινεδ σολυτιονς

Τηε 3Δ ανδ 2Δ γραπηιςαλ ιλλυστρατιονς οφ τηε ατταινεδ σολυτιονς το τηε ΚΜΝ εχυατιον ςονσιδερινγ παρτιςυλαρ αλυες οφ τηε φρεε παραμετερς αρε πρεσεντεδ το σηοω τηε σολυτιον΄ς βεηαιορ. Μορεοερ, τηε 3Δ συρφαςε γραπηιςς αρε ισυαλιζεδ το σηοω τηε σπατιοτεμποραλ αριατιον οφ τηε οβταινεδ οπτιςαλ ωαε σολυτιονς. Συρφαςε πλοτς φορ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς ανδ μοδυλυς οφ τηε οπτιςαλ σολυτιον$Q_1\left(x, y=1, t\right)$ αρε σηοων ιν **Φιγ. 1(α –ς)** , ρεσπεςτιελψ. Εαςη οφ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς οφ$Q_1\left(x, y=1, t\right)$ σπεςιφιες α περιοδις σολιτον. Ον τηε οτηερ ηανδ, τηε μοδυλυς οφ τηε μεντιονεδ σολυτιον ινδιςατες α δαρκ σολιτον (σεε **Φιγ. 1(α)**). Συςη τψπες οφ βεηαιορς μεντιονεδ αβοε ςαν βε ςονφιρμεδ φρομ τηειρ 2Δ ςροσς σεςτιοναλ λινε πλοτς ατ$t=0$, ωηιςη αρε δεπιςτεδ ιν **Φιγ. 1(δ –φ),**ρεσπεςτιελψ. **Φιγυρε 2(α –ς)** δισπλαψς αλσο τηε 3Δ γραπηιςαλ ρεπρεσεντατιον οφ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς, ανδ μοδυλυς οφ τηε οπτιςαλ σολιτον $Q_3\left(x, y=1, t\right)$, ωηερεας**Φιγ. 2(δ –φ)** δισπλαψς, ρεσπεςτιελψ, 2Δ λινε πλοτς οφ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς, ανδ μοδυλυς οφ τηε μεντιονεδ σολυτιον ατ$t=0$. Τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς οφ$Q_3\left(x, y=1, t\right)$ δεμονστρατε σινγυλαρ σολιτονς, ωηιςη αρε σηοων ιν **Φιγ. 2(α, β),** ρεσπεςτιελψ, ωηερεας$\left|Q_3\left(x, y=1, t\right)\right|$ αλσο δεσιγνατες α σινγυλαρ σολιτον (σεε **Φιγ. 2(ς)**). Συςη τψπες οφ σινγυλαρ σολιτον σολυτιονς αρε ςονφιρμεδ βψ τηειρ 2Δ πλοτς ατ $t=0$ σηοων ιν **Φιγ. 2(δ–φ),**ρεσπεςτιελψ. Τηε ρεμαινινγ οφ τηε γΚΜ εξτραςτεδ οπτιςαλ σολυτιονς ρεπρεσεντ τηε ιδεντιςαλ πηψσιςαλ ςηαραςτεριστιςς τηατ ωε ηαε μεντιονεδ αβοε.

4.2. Γραπηιςαλ εξπλανατιον οφ τηε ΝΑΕΜ οβταινεδ σολυτιονς

Τηε 3Δ πλοτς φορ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς, ανδ μοδυλυς οφ τηε σολυτιον $Q_1\left(x, y=1, t\right)$ αρε δισπλαψεδ ιν **Φιγ. 3(α –ς)** , ρεσπεςτιελψ. Τηε πλοτς οφ τηε αβοε σολυτιονς ςονφιρμ περιοδις σηαπεδ σολιτονς. Συςη τψπες οφ βεηαιορ αρε ενσυρεδ βψ τηειρ 2Δ ςροσς σεςτιοναλ λινε πλοτς ατ $t=0$, ας σηοων ιν**Φιγ. 3(δ –φ),** ρεσπεςτιελψ. Τηε σαμε τενδενςιες ηαε βεεν φουνδ φορ τηε σολυτιον $Q_3\left(x, y=1, t\right)$. Τηε 3Δ συρφαςε πλοτς φορ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς οφ$Q_5\left(x, y=1, t\right)$ αρε εξποσεδ ιν **Φιγ. 4(α, β)** , ρεσπεςτιελψ, ωηιςη ινδιςατε περιοδις σολυτιονς. Ηοωεερ, τηε μοδυλυς φορμ οφ $Q_5\left(x, y=1, t\right)$ ψιελδς α δαρκ σολιτον, ωηιςη ις σηοων ιν **Φιγ. 4(ς)** . Συςη τψπες οφ βεηαιορ πρεσεντεδ βψ**Φιγ. (α-ς)** αρε ςονφιρμεδ βψ τηειρ 2Δ ςροσς σεςτιοναλ λινε πλοτ ατ $t=0$, ωηιςη αρε δεμονστρατεδ ιν **Φιγ. 4(δ –φ),**ρεσπεςτιελψ. Εαςη οφ τηε 3Δ γραπηιςς οφ τηε ρεαλ ανδ ιμαγιναρψ παρτς οφ$Q_7\left(x, y=1, t\right)$ σηοως α σινγυλαρ περιοδις σολιτον ανδ τηεψ αρε ιλλυστρατεδ ιν **Φιγς. 5(α) ανδ 5(β**), ρεσπεςτιελψ. Βυτ τηε γραπηιςαλ ιλλυστρατιον οφ$\left|Q_7\left(x, y=1, t\right)\right|$ γιες α σινγυλαρ τψπε σολιτον ονλψ (σεε **Φιγ. 5(ς»** . Τηε σηαπεδ οφ σινγυλαρ σολιτονς αρε ςονφιρμεδ βψ τηειρ 2Δ πλοτς, ωηιςη αρε ιλλυστρατεδ ιν Φιγ. 5(δ–φ), ρεσπεςτιελψ. Μορεοερ, τηε ρεμαινινγ οβταινεδ οπτιςαλ σολυτιονς ια τηε ΝΑΕΜ αλσο ρεπρεσεντ τηε περιοδις, βριγητ, δαρκ ανδ σινγυλαρ σολιτονς.

4.3. Γραπηιςαλ εξπλανατιον οφ τηε τιμε φραςτιοναλ οβλιχυε ωαε σολυτιονς

Τηε τιμε φραςτιοναλ οβλιχυε ωαε σολυτιονς το τηε ΚΜΝ εχυατιον γιεν βψ Εχ. (1.1) αρε ρεπορτεδ βψ εξεςυτινγ τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ. Σεεραλ υσεφυλ οτηερ φορμς οφ οβλιχυε οπτιςαλ σολυτιονς το τηε ΚΜΝ εχυατιον αρε οβταινεδ ια τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ. Το ιλλυστρατε τηε εφφεςτιενεσς οφ τηε γΚΜ ανδ ΝΑΕΜ γενερατεδ σολυτιονς ωιτη φραςτιοναλιτψ ανδ οβλιχυενεσς, σομε οφ τηε οπτιςαλ σολυτιονς ατταινεδ ιν τηις αρτιςλε αρε δισπλαψεδ γραπηιςαλλψ αλονγ ωιτη τηειρ πηψσιςαλ εξπλανατιονς. Τηε πηψσιςαλ εξπλανατιον οφ τηε ατταινεδ οπτιςαλ σολυτιονς, οβταινεδ βψ τηε γΚΜ σπεςιφιεδ βψ (3.11) ις δεσςριβεδ φιρστ.

Τηε εφφεςτς οφ φραςτιοναλ παραμετερ ον τηε οβταινεδ αναλψτις σολυτιον$Q_1(x, y=1, t; \tau)$ αρε προιδεδ ιν **Φιγ. 6** ωιτη τηε παρτιςυλαρ ςηοιςε οφ τηε φρεε παραμετερς $p=1$,$q=1$, $\theta=45$, $k=1$, $d=1$,$a=3.5$, $b_1=1$ ανδ $\theta_0=0$. **Φιγυρε 6(α –δ)** δεμονστρατες τηε συρφαςε προφιλες οφ$\left|Q_1(x, y=1, t; \tau, \theta=45)\right|$ φορ τ $=0.25$, 0.50, 0.75 ανδ 1, ρεσπεςτιελψ. Τηε αριατιονς οφ ωαε προπαγατιον αλονγ τηε x-αξις ανδ t-αξις ωιτη διφφερεντ αλυες οφ τ, κεεπινγ $\theta=45$ ας ςονσταντ αρε δισπλαψεδ ιν **Φιγ. 6(ε, φ),** ρεσπεςτιελψ. Ιτ ςαν βε σεεν φρομ**Φιγς. 6(ε)** ανδ **6(φ)** τηατ τηε συρφαςε ωαε προφιλες αλονγ τηε x-αξις ανδ t-αξις αρε ςηανγεδ φορ$\tau=0.25$ ανδ 0.50 ανδ αλμοστ υνςηανγεδ φορ$\tau=0.75$ ανδ 1. Αμπλιτυδες οφ τηε ωαε προφιλες αρε φουνδ το βε νεαρλψ ιδεντιςαλ, βυτ ιτς ποσιτιονς αρε μοεδ αλονγ τηεx-αξις φορ τηε διστινςτ αλυες οφ $\tau=0.25$, 0.50, 0.75ανδ 1.

Φιγυρε 7(α –ϑ) πρεσεντς τηε οβλιχυε ωαε προπαγατιον οφ τηε γΚΜ ατταινεδ σολυτιον, σπεςιφιεδ βψ (3.11) βψ τηειρ 3Δ συρφαςε ανδ 2Δ ςροσς σεςτιοναλ λινε πλοτς. **Φιγυρε 7(α –η)**εξηιβιτς τηε οβλιχυε ωαε προπαγατιον οφ τηε σολυτιον ηαινγ τηε τιμε φραςτιοναλ δεριατιε φορ διστινςτ αλυες οφ τηε ωαε οβλιχυενεσς$\theta=15$, 30, 45, $75, 105$, 120, 135,ανδ 165, ρεσπεςτιελψ, ωιτη τηε φραςτιοναλ παραμετερ$\tau=0.75$, σπαςε $y=1$, ανδ τηε φιξεδ αλυες οφ τηε ρεμαινινγ παραμετερς, ναμελψ $p=1$, $q=1$, $d=1$, $k=1$,$a=3.5$, $b_1=1$ ανδ $\theta_0=0$.

Ιτ ις οβσερεδ φρομ**Φιγ. 7(α –δ)** τηατ τηε οβλιχυε ωαες αρε προπαγατινγ ιν τηε σαμε διρεςτιον ιν ωηιςη τηε αμπλιτυδες αρε ινςρεασινγ ωιτη τηε ινςρεασε οφ θ φορ $0 < \theta \leq 80$, ωηερεας τηε αμπλιτυδες αρε δεςρεασινγ ωιτη τηε ινςρεασε οφ θ φορ$80 < \theta < 90$. Ον τηε οτηερ ηανδ, **Φιγ. 7(ε –η)** σηοως τηε προπαγατιον οφ οβλιχυε ωαες ιν τηε οπποσιτε διρεςτιον ωιτη τηε ινςρεασε οφ θ φορ$90 < \theta < 180$. Ιν συςη ςασες, τηε ωαε αμπλιτυδες αρε ινςρεασινγ ωιτη τηε ινςρεασε οφ θ φορ$90 < \theta < 180$. Αμπλιτυδες οφ τηε οβλιχυε ωαε προφιλες αρε ςλαριφιεδ ωιτη τηε 2Δ ςροσς σεςτιοναλ λινε πλοτς (σεε **Φιγ. 7(ι, ϑ** ». Ηοωεερ, τηε αριατιον ιν τηε οβλιχυε ωαε προπαγατιον ωιτη ωαε οβλιχυενεσς οφ θ φορ $75 < \theta < 90$ ανδ$165 < \theta < 180$ αρε νοτ ινςλυδεδ ιν τηις παπερ φορ τηε σακε οφ βρειτψ. Ηοωεερ, ιτ ςαν βε οβσερεδ φρομ **Φιγ. 7(α –ϑ)** τηατ τηε ωαε προφιλες ηαε βεεν ςηανγεδ σιγνιφιςαντλψ ωιτη τηε ινςρεασε οφ οβλιχυενεσς. Ιτ ις ςλεαρλψ ισιβλε φρομ**Φιγ. 7(ι, ϑ)** τηατ τηε οβλιχυε ωαε αμπλιτυδε ις μαξιμυμ ατ$\theta = 75$ ανδ $\theta = 135$ αλονγ ωιτη ιτς x-αξις ($-5 \leq x \leq 5$) ανδ t-αξις ($0 \leq t \leq 3$) ωιτηιν τηε ωαε διρεςτιονς $0 < \theta < 90$ ανδ$90 < \theta < 180$, ρεσπεςτιελψ. Συςη τψπες οφ ωαε πηενομενα αρε κνοων ας φισσιον-φυσιον ιντεραςτιον πηενομενα.

Ιν ορδερ το εξαμινε τηε δεπενδενςε οφ τηε ωαε οβλιχυενεσς ωιτη τηε αξιςt ($0 < t \leq 5$), 3Δ ανδ 2Δ γραπης αρε πρεπαρεδ φορ$|Q_1(x=1, y=1, t; \tau=0.75, \theta)$ |φορ διφφερεντ αλυες οφ οβλιχυενεσς (θ), φραςτιοναλ παραμετερ ($\tau = 0.75$) ανδ σπαςε ($x=1, y=1$) ανδ αρε δισπλαψεδ ιν**Φιγ. 8(α, β)** . Ιτ ις σεεν φρομ **Φιγ. 8(β)** τηατ τηε ωαε αμπλιτυδε ατταινς ιτς μαξιμυμ αλυε ατ $\theta = 75$ ωιτηιν$0 < \theta < 90$ ανδ τηατ ις μαξιμυμ αγαιν ατ $\theta = 135$ωιτηιν $90 < \theta < 180$ αλονγ ωιτη ιτς t αξις ($0 \leq t \leq 3$). Ιν ορδερ το σηοω τηε εφφεςτς οφ φραςτιοναλ αλυε (τ), 3Δ ανδ 2Δ γραπης οφ$|Q_1(x=1, y=1, t=2; \tau, \theta)|$ αρε ςονστρυςτεδ ωιτηιν τηε ωαε οβλιχυενεσς $0 < \theta < 180$ ανδ αρε δισπλαψεδ ιν**Φιγ. 8(ς, δ)** . Ιτ ςαν βε περςειεδ φρομ **Φιγ. 8(δ)** τηατ τηε αμπλιτυδες αρε αριεδ φορ $\tau = 0.25$ ανδ 0.50 ανδ σταβλε φορ $\tau = 0.75$ ανδ 0.95 τηατ ις μεντιονεδ εαρλιερ ιν τηις σεςτιον. Τηυς, ιτ ις ρεασοναβλε το σαψ φρομ **Φιγ. 8(ς, δ)** τηατ τηε οβταινεδ σολυτιον ις αριεδ ηιγηλψ ατ $\tau = 0.25$αμονγ τηε αλυες οφ τηε φραςτιοναλ παραμετερ, ναμελψ0.25, 0.50, 075 ανδ 0.95. Ιν ορδερ το ενσυρε τηε εφφεςτς οφ φραςτιοναλ παραμετερ ον ΝΑΕΜ εξτραςτεδ σολυτιονς, τηε 3Δ γραπης αρε ςονστρυςτεδ φορ$|Q_1(x, y=1, t; \tau, \theta=45)$ | ιν τηεξτ πλανε ωιτη φραςτιοναλιτψ$\tau = 0.25,\ \ 0.5,\ \ 0.75,\ \ 1$ ανδ αρε πιςτυρεδ **Φιγ. 9(α-δ)** , ρεσπεςτιελψ. 2Δ λινε πλοτς αρε αλσο ςονστρυςτεδ το πρεσεντ τηε αριαβιλιτψ οφ τηε σολυτιον πρεσεντεδ τηρουγη Φιγ. 9(α-δ) αλονγ τηεx-αξις ατ $t=2$, ανδ αλονγ τηε t-αξις ατ $x=1$ ανδ αρε εξποσεδ ιν **Φιγ. 9(ε, φ),** ρεσπεςτιελψ. Ιν συςη ςασες, τηε ιδεντιςαλ πηενομενα ηαε βεεν οβσερεδ ας τηατ οφ τηε γΚΜ ατταινεδ σολυτιονς. Ηοωεερ, τηε μοδυλυς πλοτ οφ τηε ΝΑΕΜ οβταινεδ σολυτιον,$|Q_1(x, y=1, t; \tau, \theta)$ | ρεπρεσεντς α περιοδις σολιτον.

Ιν α σιμιλαρ ωαψ το σηοω τηε εφφεςτιενεσς οφ τηε οβλιχυε ωαε παραμετερ ον τηε ΝΑΕΜ ατταινεδ σολυτιον, τηε 3Δ γραπης οφ$|Q_1(x, y=1, t; \tau=0.75, \theta)$ | αρε πρεπαρεδ ιν τηε ξτ πλανε υνδερ τηε ωαε οβλιχυενεσς οφ$\theta = 15,\ 30,\ 45,\ 75, 105,\ 120,\ 135$ανδ 165, ρεσπεςτιελψ, κεεπινγ τηε οτηερ φρεε παραμετερς ρεμαιν φιξεδ, ωηιςη αρε ινδιςατεδ ιν **Φιγ. 10(α-η)** . Τηε 3Δ γραπης σηοω Υ-σηαπεδ περιοδις σολιτονς. Τηε νυμβερς οφ Υ-σηαπεδ περιοδις ωαε αρε δεςρεασινγ ωιτη τηε ινςρεασε οφ ωαε οβλιχυενεσς$\theta = 15,\ 30,\ 45,$ ανδ 75 ωιτηιν$0 < \theta < 90$, ας ιλλυστρατεδ ιν **Φιγ. 10(α-δ)** , ρεσπεςτιελψ, ωηερεας τηε νυμβερς οφ Υ-σηαπεδ περιοδις ωαε αρε ινςρεασινγ ωιτη τηε ινςρεασε οφ τηε ωαε οβλιχυενεσς$\theta = 105,\ 120,\ 135$ ανδ 165 ωιτηιν$90 < \theta < 180$, ας εξποσεδ ιν **Φιγ. 10(ε-η),**ρεσπεςτιελψ. Τηε 2Δ ςροσς σεςτιοναλ λινε πλοτς οφ$|Q_1(x, y=1, t; \tau=0.75, \theta)$ | αλονγ τηεx-αξις ατ $t=2$, ανδ αλονγ τηε t-αξις ατ $x=1$ αρε πρεσεντεδ ιν **Φιγς. 10(ι)** ανδ **10(ϑ),** ρεσπεςτιελψ, το σηοω τηε νυμβερς οφ αβοε Υ-σηαπεδ περιοδις ωαε βεηαιορς. Μορεοερ,**Φιγς. 9** ανδ **10** σηοω τηε ιδεντιςαλ πηενομενα ας τηατ οφ τηε γΚΜ οβταινεδ σολυτιονς. Ηοωεερ, τηε ΝΑΕΜ οβταινεδ σολυτιον$|Q_1(x, y=1, t; \tau, \theta)$ | ρεπρεσεντς α Υ-σηαπεδ περιοδις ωαε σολιτον. Ιτ ις συγγεστιε τηατ τηε ρεσυλτς πρεσεντεδ ιν τηις αρτιςλε ωουλδ βε εξτρεμελψ ηελπφυλ φορ αναλψζινγ τηε νατυρε οφ τηε πλανε ωαε πηενομενα ιν νονλινεαρ οπτιςαλ φιβερ ςομμυνιςατιον σψστεμς, ανδ τελεςομμυνιςατιον ενγινεερινγ.

5. Δισςυσσιον ανδ ςονςλυδινγ ρεμαρκς

Ας μεντιονεδ εαρλιερ ιν τηε λιτερατυρε σεςτιον τηατ σομε ρεσεαρςηερς ηαε ρεπορτεδ βριγητ, δαρκ, σινγυλαρ σολιτον σολυτιονς το τηε ΚΜΝ εχυατιον τηρουγη διερσε μετηοδς [19, 20, 33–39]. δ̈νσεχυεντλψ, τηε ρεσεαρςηερς πιςκεδ υπ ονλψ τηε βριγητ, δαρκ, σινγυλαρ σολιτον σολυτιονς το αν ιντεγερ ορδερ ΚΜΝ εχυατιον ωιτηουτ ςονσιδερινγ οβλιχυενεσς. Ηοωεερ, ιν τηις αρτιςλε, ωε ηαε εξπλορεδ σομε νεω τψπες οφ βριγητ, δαρκ, Υ-σηαπεδ περιοδις, ανδ σινγυλαρ σηαπεδ σολιτον σολυτιονς ωιτη διφφερεντ αμπλιτυδες το αν ιντεγερ ανδ φραςτιοναλ ΚΜΝ εχυατιον ςονσιδερινγ ωαε οβλιχυενεσς ια τηε γKM ανδ NAEM. Τηε εμπλοψεδ μετηοδς αλσο ηαε εξτραςτεδ σομε νεω οβλιχυε ωαε σολιτονς το τηε στυδιεδ εχυατιον. Ιτ ηας βεεν δεμονστρατεδ τηατ τηε ωαε προφιλε ις ςηανγεδ ωιτη τηε ςηανγινγ οφ οβλιχυενεσς ανδ φραςτιοναλιτψ. Τηε 3Δ γραπηιςαλ ιλλυστρατιονς ανδ 2Δ ςροσς σεςτιοναλ γραπηιςς φορ διφφερεντ αλυες οφ αριους παραμετερς αρε ρεπρεσεντεδ το υνδερστανδ τηε εφφεςτς οφ τηε ςηανγινγ αλυες οφ τηε παραμετερς οερ τηε σολυτιονς. Ιν ςομπαρισον ωιτη τηε ατταινεδ σολυτιονς [19, 20, 33–39], το τηε βεστ οφ αυτηορσ΄ κνοωλεδγε, τηε γενερατεδ βριγητ, δαρκ, Υ-σηαπεδ περιοδις, ανδ σινγυλαρ σολιτον ωαε σολυτιονς αρε νεω ιν ςονφορμαβλε δεριατιε ανδ οβλιχυενεσς σενσες, ωηιςη αρε νοτ ρεπορτεδ ιν πρειουσλψ πυβλισηεδ αρτιςλες. Ιτ ις ρεμαρκαβλε το περςειε τηατ μοστ οφ τηε ινεστιγατεδ σολυτιονς ιν τηις αρτιςλε ηαε διερσε στρυςτυρες οερ τηε σολυτιονς ααιλαβλε ιν τηε λιτερατυρε ιν τηε ωαε προπαγατιον οβλιχυελψ ανδ τηε εξεςυτεδ μετηοδς αρε ςομπλετελψ νεω φορ τηε στυδιεδ εχυατιον. Τηερεφορε, τηε αςχυιρεδ οπτιςαλ σολυτιονς μαψ ιλλυμινατε τηε ρεσεαρςηερς φορ φυρτηερ στυδιες το εξπλαιν πραγματις πηενομενα οφ τηε ωαε αππροαςηινγ οβλιχυενεσς ιν τηε φιελδ οφ φιβερ οπτιςς ανδ οπτιςαλ ςομμυνιςατιονς. Τηις ωορκ προιδες ειδενςε τηατ τηε γKM ανδ NAEM αρε συιταβλε φορ αςχυιρινγ νεω οπτιςαλ σολιτον φεατυρες ιν ανψ πηψσιςαλ σψστεμ ωιτη ορ ωιτηουτ φραςτιοναλ ανδ οβλιχυενεσς ςονδιτιονς.

ὃμπλιανςε ωιτη ετηιςαλ στανδαρδς

ὃνφλιςτ οφ ιντερεστ: Τηε αυτηορς δεςλαρε τηατ τηεψ ηαε νο ςονφλιςτ οφ ιντερεστ.

Ρεφερενςες

1. Γεπρεελ KA, Νοφαλ TA, Αλ-Σαψαλι ΝΣ. Οπτιςαλ σολιτον σολυτιονς φορ νονλινεαρ εολυτιον εχυατιονς ιν ματηεματιςαλ πηψσιςς βψ υσινγ τηε εξτενδεδ (G'/G)-εξπανσιον φυνςτιον μετηοδ. *Θ δμπυτ Τηεορετιςαλ Νανοσςιενςε* . 2017·14 (2): 979 –90.

2. Φεβρεια ΜΦ, Φαςαο Μ΄΄, Λατας Σ΄΄, Σουσα ΜΗ., Οπτιςαλ σολιτονς ιν φιβερς φορ ςομμυνιςατιον σψστεμς. *Φιβερς ανδ Ιντεγρατεδ Οπτιςς* . 2005·24 (3-4): 287 –313.

3. Ηοσσεινι Κ, Κυμαρ Δ, Καπλαν Μ, Βεϑαρβανεη ΕΨ. Νεω εξαςτ τραελινγ ωαε σολυτιονς οφ τηε υνσταβλε νονλινεαρ Σςηρödinger equations,*Commun Theor Phys* . 2017;68:761–67.

4. Xianguo X, Wu J. Riemann–Hilbert approach and N-soliton solutions for a generalized Sasa–Satsuma equation. *Wave Motion* . 2016;60: 62 –72.

5. Tasbozan O, Kurt A, Tozar A. New optical solutions of complex Ginzburg–Landau equation arising in semiconductor lasers. *Applied Phys B* . 2019;125(6): 104.

6. Biswas A, Alqahtani RT. Chirp-free bright optical solitons for perturbed Gerdjikov–Ivanov equation by semi-inverse variational principle, *Optik* 2017;147: 72 –76.

7. Bansal A, Biswas A, Triki H, Zhou Q, Moshokoa SP, Belic M. Optical solitons and group invariant solutions to Lakshmanan–Porsezian–Daniel model in optical fibers and PCF. *Optik* 2018;160: 86 –91.

8. Rezazadeh H, Kumar D, Neirameh A, Eslami M, Mirzazadeh M. Applications of three methods for obtaining optical soliton solutions for the Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with Kerr law nonlinearity.*Pramana* 2019;94(1): 39.

9. Zhao Y, Fan E, N-soliton solution for a higher-order Chen–Lee–Liu equation with nonzero boundary conditions, *Modern Physics Letters B* . 2020;34(04): 2050054.

10. Triki H, Babatin MM, Biswas A. Chirped bright solitons for Chen–Lee–Liu equation in optical fibers and PCF. *Optik*2017;149: 300 –303.

11. Kudryashov NA. General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation. *Optik* 2019;186: 339 –49.

12. Kumar D, Joardar AK, Hoque A, Paul GC. Investigation of dynamics of nematicons in liquid crystals by extended sinh-Gordon equation expansion method. Opt Quant Electron. 2019; 51(7): 212.

13. Mirzazadeh M, Eslami M, Biswas A. Dispersive optical solitons by Kudryashov's method. *Optik* 2014;125(23): 6874 –80.

14. Zhou Q, Kumar D, Mirzazadeh M, Eslami M, Rezazadeh H. Optical soliton in nonlocal nonlinear medium with cubic-quintic nonlinearities and spatio-temporal dispersion. *Acta Physica Polonica A* . 2018;134(6): 1204 –10.

15. Kumar D, Kaplan M. Application of the modified Kudryashov method to the generalized Schrödinger–Boussinesq equations. *Opt Quant Electron* . 2018;50(9): 329.

16. Kaplan M, Hosseini K, Samadani F, Raza N. Optical soliton solutions of the cubic-quintic non-linear Schrödinger's equation including an anti-cubic term. *J Modern Optics* . 2018;65(12):1431–36.

17. Yasar E, Yıldırım Y, Adem AR. Perturbed optical solitons with spatio-temporal dispersion in (2+1)-dimensions by extended Kudryashov method. *Optik.* 2018;158: 1–14.

18. Biswas A, Mirzazadeh M, Eslami M, Zhou Q, Bhrawy A, Belic M. Optical solitons in nanofibers with spatio-temporal dispersion by trial solution method. *Optik* . 2016;127(18): 7250 –57.

19. Ekici M, Sonmezoglu A, Biswas A, Belic MR. Optical solitons in (2+1)–dimensions with Kundu–Mukherjee–Naskar equation by extended trial function scheme. *Chinese J Phys* . 2019;57: 72–77.

20. Yıldırım Y. Optical solitons to Kundu–Mukherjee–Naskar model with modified simple equation approach. *Optik* . 2019;184: 247–52.

21. Inc M, Aliyu AI, Yusuf A, Baleanu D. Optical solitons to the resonance nonlinear Schrödinger equation by sine-Gordon equation method.*Superlattice Microst.* 2018;113: 541–549.

22. Kumar D, Hosseini K, Samadani F. The sine-Gordon expansion method to look for the traveling wave solutions of the Tzitzéica type equations in nonlinear optics. *Optik.* 2017;149: 439–46.

23. Seadawy AR, Kumar D, Chakrabarty AK. Dispersive optical soliton solutions for the hyperbolic and cubic-quintic nonlinear Schrödinger equations via the extended sinh-Gordon equation expansion method.*Eur Phys J Plus* . 2018;133(5):182.

24. Bulut H, Sulaiman TA, Baskonus HM. Dark, bright and other soliton solutions to the Heisenberg ferromagnetic spin chain equation,*Superlattice Microst.* 2018;123: 12–19.

25. Kumar D, Manafian J, Hawlader F, Ranjbaran A. New closed form soliton and other solutions of the Kundu–Eckhaus equation via the extended sinh-Gordon equation expansion method. *Optik.* 2018;160: 159–167.

26. Kudryashov NA. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos Solitons Fractal.*2005;24(5): 1217–31.

27. Bilige S, Chaolu T, Wang X. Application of the extended simplest equation method to the coupled Schrödinger-Boussinesq equation.*Appl Math Comput* . 2013;224: 517–23.

28. Rezazadeh H, Mirhosseini-Alizamini SM, Eslami M, Rezazadeh M, Mirzazadeh M, Abbagari S. New optical solitons of nonlinear conformable fractional Schrödinger-Hirota equation. *Optik.* 2018;172: 545–53.

29. Khater MMA, Seadawy AR, Lu D. Dispersive optical soliton solutions for higher order nonlinear Sasa-Satsuma equation in mono mode fibers via new auxiliary equation method. *Superlattice Microst.* 2018;113: 346–58.

30. Kundu A, Mukherjee A, Naskar T. Modelling rogue waves through exact dynamical lump soliton controlled by ocean currents. *Proceedings of the Royal Society A.* 2014;470: 20130576.

31. Qiu D, Zhang Y, He J. The rogue wave solutions of a new (2+1)-dimensional equation, *Communs Nonlinear Sci Numel Simulation.* 2016;30(1-3): 307–15.

32. Kundu A, Mukherjee A. Novel integrable higher-dimensional nonlinear Schrodinger equation: properties, solutions, applications. *arXiv* . 2013; 1305.4023.

33. Yıldırım Y. Optical solitons to Kundu–Mukherjee–Naskar model with trial equation approach. *Optik* . 2019;183: 1061–65.

34. Aliyu AI, Li Y, Baleanu D. Single and combined optical solitons and conservation laws in (2+1)-dimensions with Kundu–Mukherjee–Naskar equation. *Chinese J Phys.* 2020; 63: 410–18.

35. Yıldırım Y, Mirzazadeh M. Optical pulses with Kundu-Mukherjee-Naskar model in fiber communication systems. *Chinese J Phys.* 2020;64: 183–93.

36. Jhangeer A, Seadawy AR, Ali F, Ahmed A. New complex waves of perturbed Shrödinger equation with Kerr law nonlinearity and Kundu-Mukherjee-Naskar equation. *Results Phys.* 2020;16: 102816.

37. Biswas A, Guzman JV, Bansal A, Kara AH, Alzahrani AK, Zhou Q, Belic MR. Optical dromions, domain walls and conservation laws with Kundu–Mukherjee–Naskar equation via traveling waves and Lie symmetry,*Results Phys.* 2020;16: 102850.

38. Yıldırım Y. Optical solitons to Kundu–Mukherjee–Naskar model in birefringent fibers with modified simple equation approach.*Optik.* 2019;184: 121–27.

39. Kudryashov NA. General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar model. *Optik* . 2019;186: 22 – 27.

40. Khalil R, Al Horani M, Yousef A, Sababheh M. A new definition of fractional derivative, *J Comput Appl Math* . 2014; 264: 65–70.

41. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus. *J Comput Appl Math* . 2015;279, 57–66.

42. Kumar D, Seadawy AR, Joardar AK. Modified Kudryashov method via new exact solutions for some conformable fractional differential equations arising in mathematical biology. *Chinese J Phys* . 2018;56(1): 75 –85.

43. Kumar D, Darvishi MT, Joardar AK. Modified Kudryashov method and its application to the fractional version of the variety of Boussinesq-like equations in shallow water. *Opt Quant Electron* . 2018;50(3): 128.

44. Foroutan M, Kumar D, Manafian J, Hoque A. New explicit soliton and other solutions for the conformable fractional Biswas–Milovic equation with Kerr and parabolic nonlinearity through an integration scheme.*Optik.* 2018;170: 190 – 202.

45. Ferdous F, Hafez MG, Biswas A, Ekici M, Zhou Q, Alfiras M, Moshokoa SP, Belic MR. Oblique resonant optical solitons with Kerr and parabolic law nonlinearities and fractional temporal evolution by generalized$exp\ (-\ \Phi\ (\xi))$-expansion. *Optik* . 2019;178: 439–48.

46. Akther S, Hafez MG, Ferdous F. Oblique resonance wave phenomena for nonlinear coupled evolution equations with fractional temporal evolution, *Eur Phys J Plus.* 2019;134(9): 473.

47. Ferdous F, Hafez MG. Oblique closed form solutions of some important fractional evolution equations via the modified Kudryashov method arising in physical problems. *J Ocean Eng Sci.* 2018;3(3): 244–52.

Figures caption

Figure 1. 3D plots of the solution $Q_1(x, y = 1, t)$, obtained by the gKM: (a) real part, (b) imaginary part, (c) modulus, and (d)-(f): the cross sectional 2D line plots of (a)-(c) at $t = 0$, respectively, for the particular choice of the free parameters$p = 1$, $q = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $l_1 = 1$,$l_2 = 2$, $d = 1$, $a = 3.5$, $b_1 = 1$ and$\theta_0 = 0$.

Figure 2. 3D plots of the solution $Q_3(x, y = 1, t)$, obtained by the gKM: (a) real part, (b) imaginary part, (c) modulus, and (d)-(f): the cross sectional 2D line plots of (a)-(c) at $t = 0$, respectively, with $p = 1$, $q = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$,$l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $d = 1$, $a = 3.5$, $b_1 = 1$ and$\theta_0 = 0$.

Figure 3 . 3D plots of the solution $Q_1(x, y = 1, t)$, obtained by the NAEM: (a) real part, (b) imaginary part, (c) modulus, and (d)-(f): the cross sectional 2D line plots of (a)-(c) at $t = 0$, respectively, with $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\sigma = 1$,$p = 1$, $q = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $l_1 = 1$,$l_2 = 2$, and $\theta_0 = 0$.

Figure 4 . 3D plots of the solution $Q_5(x, y = 1, t)$, obtained by the NAEM: (a) real part, (b) imaginary part, (c) modulus, and (d)-(f): the cross sectional 2D line plots of (a)-(c) at $t = 0$, respectively, with $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\sigma = 1$,$p = 1$, $q = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $l_1 = 1$,$l_2 = 2$, and $\theta_0 = 0$.

Figure 5. 3D plots of the solution $Q_7(x, y = 1, t)$, obtained by the NAEM: (a) real part, (b) imaginary part, (c) modulus, and (d)-(f): the cross sectional 2D line plots of (a)-(c) at $t = 0$, respectively, with $7\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\sigma = 1$,$p = 1$, $q = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $l_1 = 1$,$l_2 = 2$, and $\theta_0 = 0$.

Figure 6. Effects of the fractional parameter on$|Q_1(x, y = 1, t; \tau, \theta = 45)\ |$, obtained by the gKM: (a)-(d) with $\tau = 0.25,\ \ 0.50,\ \ 0.75,\ \ 1$, respectively, for the particular choice of the free parameters$p = 1$, $q = 1$, $\theta = 45$, $d = 1$, $k = 1$,$a = 3.5$, $b_1 = 1$ and $\theta_0 = 0$, and the cross sectional 2D line plots of (a)-(d): (e) variation of the surface profile along x-axis at $t = 2$ and (f) variation of the surface profile along t-axis at $x = 1$.

Figure 7. Effects of wave obliqueness on$|Q_1(x, y = 1, t; \tau = 0.75, \theta)\ |$, obtained by the gKM: (a)-(h) of$\theta = 15,\ 30,\ 45,\ 75, 105,\ 120,\ 135,\ 165$, respectively, with $p = 1$, $q = 1$, $\tau = 0.75$,$d = 1$, $k = 1$, $a = 3.5$, $b_1 = 1$, and$\theta_0 = 0$, and the cross sectional 2D line plots of (a)-(h): (i) variation of the surface profile along x-axis at $t = 2$ and (j) variation of the surface profile along t-axis at $x = 1$.

Figure 8 . Effects of wave obliqueness on$|Q_1(x = 1, y = 1, t; \tau = 0.75, \theta)|$, obtained by the gKM: (a) 3D plot and (b) variation of the surface profile along$t$-axis with respect to different oblique wave directions. Effects of the fractional parameter on the solution$|Q_1(x = 1, y = 1, t = 2; \tau, \theta)|$, obtained by the gKM: (c) 3D plot and (d) variation of the surface profile along oblique wave direction with respect to different fractional values.

Figure 9 . Effects of the fractional parameter on$|Q_1(x, y = 1, t; \tau, \theta = 45)|$, obtained by the NAEM: (a)-(d) of $\tau = 0.25,\ \ 0.5,\ \ 0.75,\ \ 1$, respectively, for the particular choice of the free parameters $\alpha = 1$,$\beta = 1$, $\sigma = 1$, $p = 1$,$q = 1$, $k = 1$, $\theta = 45$and $\theta_0 = 0$, and the cross sectional 2D line plots of (a)-(d): (e) variation of the surface profile along x-axis at $t = 2$ and (f) variation of the surface along t-axis at $x = 1$.

Figure 10 . Effects of wave obliqueness on$|Q_1(x, y = 1, t; \tau = 0.75, \theta)|$, obtained by the NAEM: (a)-(h) of$\theta = 15,\ 30,\ 45,\ 75, 105,\ 120,\ 135,\ 165$, respectively, with $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\sigma = 1$,$p = 1$, $q = 1$, $k = 1$, $\tau = 0.75$ and $\theta_0 = 0$, and the cross sectional 2D line plots of (a)-(h): (i) variation of the surface profile along x-axis at $t = 2$ and (j) variation of the surface profile along t-axis at $x = 1$.